Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап **2018-2019 г.г.**

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу с постоянными скоростями одновременно выехали соответственно мотоциклист и велосипедист. Спустя 20 минут после старта мотоциклист оказался на 2 км ближе к Б, чем середина АБ, а спустя 30 минут велосипедист оказался на 3 км ближе к Б, чем середина АБ. Через сколько минут после старта встретились мотоциклист и велосипедист?

9.2. Может ли число, оканчивающееся на 222, быть нетривиальной степенью некоторого натурального числа, то есть представляться в виде x^y, где $x, y > 1$ - натуральные числа?

9.3. Вася должен на каждой грани нескольких кубиков написать по одной цифре так, чтобы любую упорядоченную комбинацию из трёх цифр от 000 до 999 включительно можно было получить, выбрав некоторых три различных кубика и положив их подходящими сторонами вверх в нужном порядке. При этом цифры 6 и 9 при повороте на 180 градусов не считаются переходящими друг в друга. Какое минимальное количество кубиков должен использовать Вася?

9.4. На стороне АС треугольника АВС выбрана точка Р такая, что РС=2АР. Точка О – центр вписанной окружности треугольника РВС, Е – точка касания этой окружности с прямой РВ. Оказалось, что РВ=ВС. Доказать, что прямая АЕ параллельна прямой РО.

9.5. На доске записаны 10 чисел: 1,2,3,4,4,5,5,11,12,13. С ними можно производить операции двух типов: либо из любых девяти из них вычесть 1, а к оставшемуся прибавить 9, либо наоборот, из одного вычесть 9, а к остальным прибавить по 1. При этом отрицательные числа получать нельзя.

Можно ли, применив несколько таких операций, сделать все десять чисел разными?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап **2018-2019 г.г.**

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все числа a и b, для которых равенство $|ax+by|+|bx+ay|=|x|+|y|$ выполнено при всех значениях переменных x и y.

10.2. Найти все пары натуральных чисел x и y таких, что их наименьшее общее кратное равно $1+2x+3y$.

10.3. Найти количество различных способов расстановки 8 ладей в клетках шахматной доски 8 на 8 таких, чтобы каждая клетка доски находилась под боем хотя бы одной из них. Ладьи могут бить друг друга, ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, в которой она стоит, включая саму клетку, в которой стоит.

10.4. Пусть для положительных чисел a,b,c,x,y,z выполнены соотношения: $ac-b^2>0$ и $az-2by+cx=0$. Доказать, что тогда $xz-y^2 \le 0$.

10.5. Доказать, что разность длин диагонали A_1A_4 и стороны A_1A_2 правильного десятиугольника $A_1A_2A_3\ldots A_{10}$ равна радиусу его описанной окружности. Десятиугольник называется *правильным*, если все его углы равны между собой и все его стороны равны между собой.