Инженерная Олимпиада школьников Центра России по математике,

2017-2018 учебный год, 1 отборочный этап

8-9 классы

1. Решить уравнение

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$$

2. В финале первенства Липецкого Государственного Технического Университета по игре «Брэйн ринг» приняли участие 4 команды. По правилам каждая команда сыграла с каждой дважды, за победу в бою начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Команда, занявшая последнее место, набрала 5 очков. Сколько очков набрала команда, занявшая первое место?

3. Известный, но рассеянный изобретатель Архимедов спрятал чертеж своего очередного гениального изобретения в сейф и забыл шифр. Он помнит только то, что при создании шифра он выписал 10 первых простых чисел натурального ряда, а затем вычеркнул половину цифр таким образом, чтобы получилось наименьшее возможное число. Помогите незадачливому Архимедову открыть сейф.

4. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6, 6 – при делении на 7.

5. В погребе известного, но рассеянного изобретателя Архимедова стоит 20 одинаковых банок с компотом. В 8 банках яблочный компот, в 7 – вишневый, в 5 – абрикосовый. Забыв вкрутить в погребе лампочку, Архимедов неожиданно вспомнил, что к нему должны нагрянуть гости. Каково наибольшее число банок, которое в темноте можно вынести из погреба с уверенностью, что там осталось еще хотя бы 4 банки компота одного сорта и три банки другого?

6. В равнобедренном ΔABC с основанием AB проведена биссектриса AD. Через точку D провели прямую, перпендикулярную AD и пересекающую AB в точке F. Найдите радиус окружности, описанной около ΔADF, если $BD=2018$.

7. Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x-2013}-|x+2017|$.

8. Известный, но рассеянный изобретатель Архимедов забыл на кухонном столе цепочку сосисок длины *n.* Два неизвестных, но очень сообразительных кота изобретателя Архимедова стащили сосиски со стола и устроили соревнование: по очереди стали перегрызать по одной перемычке между сосисками и съедать образовавшиеся одиночные сосиски. Было решено, что выиграет тот, кто съест большее число сосисок. Кто победит в этом поединке.

Инженерная Олимпиада школьников Центра России по математике,

2017-2018 учебный год, 1 отборочный этап, решения

8-9 классы

1. Решить уравнение

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$$

Решение.

Известно, что $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{x+2014}-\frac{1}{x+2015}+\frac{1}{x+2015}-\frac{1}{x+2016}+\frac{1}{x+2016}-\frac{1}{x+2017}+\frac{1}{x+2017}-\frac{1}{x+2018}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{1}{x+2014}-\frac{1}{x+2018}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{x+2018-x-2014}{(x+2014)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{4}{(x+2014)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$$

Пусть $x+2016=y$, тогда получим

$$\frac{4}{(y-2)(y+2)}=\frac{1}{999999} \text{ или } y^2-4=4\cdot 999999$$

$$y^2=4\cdot 10^6$$

$$y=\pm 2000.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим $x+2016=\pm 2000$. Значит, исходное уравнение имеет два корня $x_1=-4016, x_2=-16$.

Ответ: $x_1=-4016, x_2=-16$.

2. В финале первенства Липецкого Государственного Технического Университета по игре «Брэйн ринг» приняли участие 4 команды. По правилам каждая команда сыграла с каждой дважды, за победу в бою начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Команда, занявшая последнее место, набрала 5 очков. Сколько очков набрала команда, занявшая первое место?

Решение. Всего было 12 игр, в каждой из которых разыгрывалось 2 очка, а всего очков 24. По условию команда, занявшая последнее место, набрала 5 очков. Значит, первые 3 команды набрали 19 очков. Если допустить, что команда, занявшая третье место, набрала 6 очков, то для 1 и 2 места остается в сумме 13 очков. Это число с учетом условия можно представить лишь так: *6+7=13*, т.е. команда, занявшая первое место, набрала 7 очков. Если же допустить, что команда, занявшая 3 место, наберет 7 очков, то для 1 и 2 мест остается 12 очков, а это по условию невозможно.

Ответ: 7 очков.

3. Известный, но рассеянный изобретатель Архимедов спрятал чертеж своего очередного гениального изобретения в сейф и забыл шифр. Он помнит только то, что при создании шифра он выписал 10 первых простых чисел натурального ряда, а затем вычеркнул половину цифр таким образом, чтобы получилось наименьшее возможное число. Помогите незадачливому Архимедову открыть сейф.

Решение. 2357111317192329 – первые десять простых чисел натурального ряда. Всего 16 цифр, необходимо вычеркнуть 8 цифр таким образом, чтобы получилось наименьшее из возможных чисел. Для этого будем вычеркивать таким образом, чтобы впереди осталось как можно больше единиц. Убрав единицы, будем вычеркивать наибольшие цифры из больших разрядов. В итоге получим искомый код 11111229.

Ответ: 11111229.

4. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6, 6 – при делении на 7.

Решение: Если к искомому числу прибавить 1, то получится число, которое делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7 нацело. 420 – наименьшее из таких чисел. Значит, искомое число 419.

Ответ: 419.

5. В погребе известного, но рассеянного изобретателя Архимедова стоит 20 одинаковых банок с компотом. В 8 банках яблочный компот, в 7 – вишневый, в 5 – абрикосовый. Забыв вкрутить в погребе лампочку, Архимедов неожиданно вспомнил, что к нему должны нагрянуть гости. Каково наибольшее число банок, которое в темноте можно вынести из погреба с уверенностью, что там осталось еще хотя бы 4 банки компота одного сорта и три банки другого?

Решение. Переформулируем вопрос задачи: какое наименьшее количество банок надо оставить в погребе, чтобы среди них оказались 4 банки компота одного сорта и три банки другого. Чтобы обеспечить 4 банки компота одного сорта надо оставить 10 банок. Но среди них может остаться все 8 банок яблочного компота. Не яблочного компота оставили точно не меньше 2 банок. Тогда оставим еще 3 банки. Из 5 банок двух сортов, три будут обязательно одного сорта. Итак, 13 – минимальное число банок, которое можно оставить в погребе. Следовательно, 7 – максимальное число банок, которое из погреба можно вынести.

Ответ: 7 банок.

6. В равнобедренном ΔABC с основанием AB проведена биссектриса AD. Через точку D провели прямую, перпендикулярную AD и пересекающую AB в точке F. Найдите радиус окружности, описанной около ΔADF, если $BD=2018$.

Решение. Пусть в ΔABC $AC=BC$, AD – биссектриса угла A. Из точки $D \in BC$ проведем $DE \| CA$. Тогда точка E – центр описанной окружности, так как ΔADF прямоугольный ($AD \perp DF$ по условию) и $AF=2R$ – диаметр описанной окружности. Значит, $EA=ED=EF=R$. Кроме того, ΔBDE подобен ΔBCA ($\angle A$ - общий, $DE \| CA$ по построению).

Значит, ΔBDE равнобедренный ($\angle B = \angle CAB = \angle DEB$), тогда $BD=DE=2018$.

ΔAED также равнобедренный ($AE=DE$ – по доказанному).

Следовательно, $BD=DE=AE=FE=R=2018$.

Ответ: 2018.

7. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x-2013} - |x+2017|$.

Решение. Пусть $\sqrt{x-2013} = t$, где $t \geq 0$, тогда $x = t^2 + 2013$ и $y = t - \left|t^2 + 4030\right|$.

Но $t^2 + 4030 > 0$, при любых *t*, следовательно, $y = t - t^2 - 4030 = -\left(t^2 - t + 4030\right)$.

Выделим в правой части полный квадрат $y = -\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4029{,}75\right)$. Получим, что наименьшее значение функции достигается при $t=0{,}5$ и $y=-4029{,}75$.

Ответ: $y_{наим} = -4029{,}75$.

8. Известный, но рассеянный изобретатель Архимедов забыл на кухонном столе цепочку сосисок длины *n.* Два неизвестных, но очень сообразительных кота изобретателя Архимедова стащили сосиски со стола и устроили соревнование: по очереди стали перегрызать по одной перемычке между сосисками и съедать образовавшиеся одиночные сосиски. Было решено, что выиграет тот, кто съест большее число сосисок. Кто победит в этом поединке.

Решение. Пусть *n* – нечетно, т.е. $n=2k+1$. Занумеруем все сосиски подряд числами от 1 до *n*. Сосиску с номером $k+1$ будем называть центральной. Второму коту каждым ходом надо перегрызать перемычку, симметричную той, которую перегрыз на предыдущем ходу первый кот (относительно центральной сосиски). тогда он съест сосисок не меньше, чем первый, причем первый при такой игре не сможет съесть центральную сосиску (так как ее концы симметричны друг другу относительно этой сосиски). Значит, второй кот съест не менее $k+1$ сосиски и выиграет.

Пусть теперь $n=2k$ четно. Занумеруем все сосиски подряд числами от 1 до *n*. В этом случае первый кот должен первым ходом съесть одну из крайних сосисок. Тогда перед ходом второго кота окажется нечетное число сосисок, и из них он сможет съесть только меньше половины, если первый кот будет использовать стратегию второго кота для случая нечетного *n*. При такой стратегии первый кот съест в результате по крайней мере на две сосиски больше, чем второй.