2016/2017 УЧЕБНЫЙ ГОД

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

8-9 класс
Вариант 1

1. Решите уравнение.

$\left|x^2 - 2017|x| + 2018\right| = \pi - 4$

2. Все целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 2017 месте?

3. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны *a* и *b,* то их можно заменить на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $\left(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$ из тройки $\left(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

4. Точки *M* и *N* – середины сторон *AB* и *AD* параллелограмма *ABCD*. Прямые *DM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника *AMPN*?

5. Шесть корзин пронумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по ним 20 одинаковых апельсинов так, чтобы ни одна корзина не пустовала?

6. Докажите, что $2017^2 + 2017^2 \cdot 2018^2 + 2018^2$ является квадратом целого числа.

7. Точка пересечения графиков *y=ax+b* и *y=bx+c* отмечена желтым цветом, а точки пересечения этих графиков с осью ординат – зеленым цветом. Ось абсцисс стерта. Как восстановить её, если $a \neq b$, но числа *a* и *b* нам неизвестны.

8. *ABCD* – трапеция, в которой известны длины всех ее сторон. *AB=5, BC=2,CD=12, AD=15,* где *BC* и *AD* – основания трапеции. Найдите площадь *ABCD*.

РЕШЕНИЕ

1. Решите уравнение. $\left|x^2-2017|x|+2018\right|=\pi-4$

Решение. Число $\pi-4$ отрицательно. Модуль числа не может быть отрицательным, поэтому уравнение решений не имеет.

2. Все целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 2017 месте?

Решение. На цифры от 1 до 9 уйдет 9 цифр, на двузначные числа от 10 до 90 уйдет 180 цифр. Всего останется *2017 – 189 = 1828* цифр, с помощью которых можно записать *1828 : 3 = 609* трехзначных чисел от 100 до 708. Одна цифра останется для написания следующего трехзначного числа 709. Следовательно, на 2017 месте стоит цифра 7.

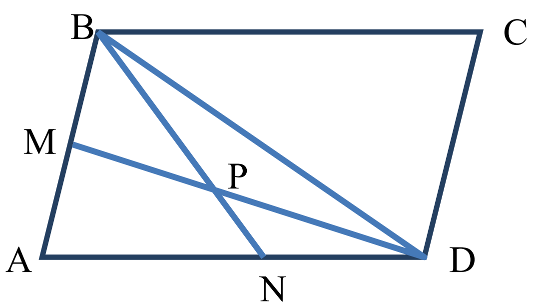
3. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны *a* и *b,* то их можно заменить на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $\left(1,\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$ из тройки $\left(2,\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

Решение. Рассмотрим сумму квадратов чисел тройки *(a, b, c)* до преобразования и тройки $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}},c\right)$ уже после преобразования. Имеем:

$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2$. Значит, указанное преобразование не изменяет сумму квадратов чисел тройки. Остается рассмотреть суммы квадратов чисел данных троек и убедиться, что их нельзя получить друг из друга.

4. Точки *M* и *N* – середины сторон *AB* и *AD* параллелограмма *ABCD*. Прямые *DM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника *AMPN*?

Решение.



Проведем диагональ BD. Тогда BN и DM – медианы треугольника ABD. Следовательно, $S_{AMPN} = \frac{2}{6}S_{\Delta ABD} = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$ (так как медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника). Итак, площадь четырехугольника $AMPN$ составляет шестую часть от площади параллелограмма $ABCD$.

5. Шесть корзин пронумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по ним 20 одинаковых апельсинов так, чтобы ни одна корзина не пустовала?

Решение. Выложим апельсины в ряд. Для определения расклада апельсинов по корзинам разделим ряд пятью перегородками на шесть групп: первая группа для первой корзины, вторая – для второй и так далее. Таким образом, число вариантов раскладки апельсинов по корзинам равно числу способов расположения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между двадцатью апельсинами 19 перегородок, а крайними должны быть апельсины – это обеспечит наполняемость крайних корзин). Число возможных расположений найдем по формуле $C_{19}^{5} = \frac{19!}{5!\cdot(19-5)!} = 11628$.

6. Докажите, что $2017^2 + 2017^2\cdot 2018^2 + 2018^2$ является квадратом целого числа.

Решение. Рассмотрим выражение $n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^2(n+1)^2 + (n+1)^2$, которое является полным квадратом при любом значении n. В том числе, при $n = 2017$.

7. Точка пересечения графиков $y=ax+b$ и $y=bx+c$ отмечена желтым цветом, а точки пересечения этих графиков с осью ординат – зеленым цветом. Ось абсцисс стерта. Как восстановить её, если $a \neq b$, но числа a и b нам неизвестны.

Решение. Найдем точку пересечения графиков функций $y=ax+b$ и $y=bx+a$, приравняв их друг другу их значения:

$ax+b=bx+a;$ $(a-b)x=a-b;$ $x=1$

$y=a+b.$

Опустим перпендикуляр из желтой точки E на ось ординат, получим точку с координатами R (0; $a+b$). Зеленые точки имеют координаты: A (0; a), B (0; b). На луче RA отложим от точки R последовательно отрезки длиной a и b, получим начало координат. Восстановим из нее перпендикуляр к оси ординат и получим ось абсцисс.

8. *ABCD* – трапеция, в которой известны длины всех ее сторон. *AB=5, BC=2,CD=12, AD=15,* где *BC* и *AD* – основания трапеции. Найдите площадь *ABCD*.

Решение. Проведем $CF \| AB$. *ABCF* – параллелограмм по определению. Значит, *AF=BC=2, CF=AD=5, FD=15-2=13*. Рассмотрим треугольник *CDF*. По теореме, обратной теореме Пифагора, он прямоугольный. Высота *h* треугольника *CDF* также является высотой исходной трапеции. Подсчитаем двумя способами удвоенную площадь треугольника *CDF*: $13 \cdot h = 12 \cdot 5$. Следовательно, $h = \frac{60}{13}$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = 39\frac{3}{13}$.

10-11 классы

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$x^{2017} \cdot \sqrt{x-2017} + 2017 \cdot \cos\frac{\pi x}{2017} < x^{2018} \cdot \sqrt{2017-x} + 2017 \cdot \sqrt{2018-x}$$

2. Существуют ли такие иррациональные числа *a* и *b*, что степень a^b равна числу 2017?

3. Легковерный гражданин занял на три месяца деньги в фирме “Рога и копыта”. Представитель фирмы “Рога и копыта” обещал, что каждый месяц будет начисляться 2% на оставшуюся сумму долга (процентная ставка 2% ежемесячно). Но, благодаря двусмысленностям в договоре, 2% были начислены только в первый месяц, а в каждый из следующих месяцев процентная ставка повышалась на 3%, по сравнению с предшествующим месяцем. Через три месяца гражданин заплатил на 7 834 руб. больше, чем занимал. Какую сумму он занимал? Досрочное погашение было запрещено.

4. Было безошибочно подсчитано, что при подбрасывании двух игральных кубиков сумма выпавших очков *S* получается с вероятностью $\frac{1}{18}$. Чему могло равняться *S*?

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2+14x+40}-4\sqrt{\dfrac{x+4}{x+10}}=\sqrt{\dfrac{x+10}{x+4}}$.

6. На каждой стороне правильного n-угольника, вне его, построен правильный треугольник. В полученной плоской "шестерёнке", отношение площади правильного n-угольника к сумме площадей правильных треугольников равно $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1$. Чему равно n?

7. В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n ($n > 1$), каждое a_i, начиная с a_2, есть сумма цифр числа a_{i-1}. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2017$.

а) Определите, могло ли n равняться 3;

б) определите, могло ли n равняться 5;

в) найдите наименьшее и наибольшее возможные значения n.

8. Сейф закрыт на кодовый замок, имеющий переключатели, которые могут принимать положение двух видов: —, |. Переключатели расположены в клетках таблицы $(2n + 1) * (2n)$ (где $n \in N$) и первоначально занимают произвольное положение. При повороте одного переключателя вместе с ним поворачиваются все переключатели, находящиеся с ним в одной строке и в одном столбце. Всегда ли можно открыть сейф? Сейф открыт, если все переключатели имеют вид: —. В случаях наличия возможности открытия сейфа опишите соответствующий алгоритм.

РЕШЕНИЕ

1. Решите неравенство

$$x^{2017}\cdot\sqrt{x-2017}+2017\cdot\cos\frac{\pi x}{2017}<x^{2018}\cdot\sqrt{2017-x}+2017\cdot\sqrt{2018-x}$$

Решение. О.Д.З: $x = 2017$. Проверка показывает, что $x = 2017$ является решением неравенства.

Ответ: 2017.

2. Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что степень a^b равна числу 2017?

Решение. Например, $\sqrt{2}^{2\cdot\log_2 2017} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_2 2017} = 2^{\log_2 2017} = 2017$**.**

Ответ: да, существуют.

3. Легковерный гражданин занял на три месяца деньги в фирме “Рога и копыта”. Представитель фирмы “Рога и копыта” обещал, что каждый месяц будет начисляться 2% на оставшуюся сумму долга (процентная ставка 2% ежемесячно). Но, благодаря двусмысленностям в договоре, 2% были начислены только в первый месяц, а в каждый из следующих месяцев процентная ставка повышалась на 3%, по сравнению с предшествующим месяцем. Через три месяца гражданин заплатил на 7 834 руб. больше, чем занимал. Какую сумму он занимал? Досрочное погашение было запрещено.

Решение. Пусть x руб. величина кредита. Получим уравнение

$$x \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}08 = x + 7\,834;$$

$$x \cdot 0{,}15668 = 7\,834.$$

Ответ: 50 000 руб.

4. Было безошибочно подсчитано, что при подбрасывании двух игральных кубиков сумма выпавших очков *S* получается с вероятностью $\frac{1}{18}$**. Чему могло равняться *S*?**

Решение. Общее количество вариантов $6 \cdot 6 = 36$. Следовательно, сумма S получалась ровно в двух вариантах. Возможные значения

$$S = 3 = 1 + 2 = 2 + 1;$$

$$S = 11 = 5 + 6 = 6 + 5;$$

Ответ: 3 или 11.

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2+14x+40} - 4\sqrt{\frac{x+4}{x+10}} = \sqrt{\frac{x+10}{x+4}}$**.**

Решение. 1. О.Д.З.: $x \in (-\infty; -4] \cup (-4; +\infty)$.

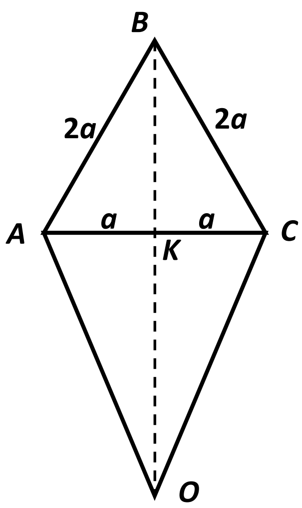
2. Умножим обе части исходного уравнения на $\sqrt{x^2+14x+40}$, получим уравнение $x^2+14x+40-4\cdot|x+4| = |x+10|$.

3. Полученное уравнение, с учетом О.Д.З., равносильно совокупности двух систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq -4; \\ x^2+14x+40-4\cdot(x+4)=x+10;\end{cases} \\ \begin{cases}x < -10; \\ x^2+14x+40+4\cdot(x+4)=-(x+10).\end{cases}\end{array}\right.$

4. Из первой системы получим: $x = -2$, второй – $x=\dfrac{-19-\sqrt{97}}{2}$.

Ответ: – 2; $\dfrac{-19-\sqrt{97}}{2}$**.**

6. На каждой стороне правильного *n*-угольника, вне его, построен правильный треугольник. В полученной плоской “шестерёнке”, отношение площади правильного *n*-угольника к сумме площадей правильных треугольников равно $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1$**. Чему равно *n*?**



Решение. 1. Рассмотрим часть “шестерёнки”, состоящую из одного правильного треугольника ABC и треугольника AOC, являющегося частью правильного n-угольника (O – центр правильного n-угольника). Отношение площади правильного n-угольника к сумме площадей правильных треугольников равно отношению площади треугольника AOC к площади треугольника ABC. Отношение площади треугольника AOC к площади треугольника ABC равно $\dfrac{OK}{BK}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

2. Введём обозначения, $AK = CK = a$, $AB = AC = BC = 2a$, $\angle COK=\alpha$. Тогда $BK=a\sqrt{3}$, $tg\alpha=\dfrac{CK}{OK}=\dfrac{a}{OK}$, $OK=\dfrac{a}{tg\alpha}$.

3. $\dfrac{OK}{BK}=\dfrac{a}{tg\alpha\cdot a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{tg\alpha\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, $tg\alpha=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

4. $tg(2\alpha)=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\cdot(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\frac{2\cdot(2-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}-6}=\frac{2\cdot(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $2\alpha=30^\circ$.

5. $n=\frac{360}{30}=12$.

Ответ: 12.

7. В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n ($n>1$), каждое a_i, начиная с a_2, есть сумма цифр числа a_{i-1}. Известно, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=2017$.

а) Определите, могло ли n равняться 3;

б) определите, могло ли n равняться 5;

в) найдите наименьшее и наибольшее возможные значения n.

Решение. 1. Остаток от деления 2017 на 9 равен 1. Остаток при делении на 9 натурального числа равен остатку от деления на 9 суммы цифр этого числа.

а) При сложении трёх чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на 9, получить число, дающее при делении на 9 в остатке 1, не удастся.

б) При сложении пяти чисел, имеющих остатки при делении на 9 равные 2, получается число, дающее при делении на 9 в остатке 1. Условию задачи удовлетворяет следующая последовательность: 1991; 20; 2; 2; 2.

в) наименьшее возможное значение n равно 2: $2012 + 5 = 2017$.

Наибольшее возможное значение n равно 2017: $1 + 1 + \ldots + 1 = 2017$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 2 и 2017.

8. Сейф закрыт на кодовый замок, имеющий переключатели, которые могут принимать положение двух видов: —, |. Переключатели расположены в клетках таблицы $(2n+1)*(2n)$ (где $n\in N$) и первоначально занимают произвольное положение. При повороте одного переключателя вместе с ним поворачиваются все переключатели, находящиеся с ним в одной строке и в одном столбце. Всегда ли можно открыть сейф? Сейф открыт, если все переключатели имеют вид: —. В случаях наличия возможности открытия сейфа опишите соответствующий алгоритм.

Решение. Для определенности будем считать, что столбцов в таблице больше, чем строк.

Заменим переключатели “—” на (– 1), а переключатели “|” на 1, тогда инвариантом будет являться произведение чисел, стоящих в ячейках таблицы (произведение будет оставаться неизменным, так как при каждом повороте переключателя будут поворачиваться $4n$ переключателя, соответственно, $4n$ числа изменят знак.

1 случай. Если количество переключателей вида “—” нечетное число.

Первоначально произведение равно – 1, а в итоге оно должно равняться 1. Следовательно, сейф открыть не удастся?

2 случай. Если количество переключателей вида “—” четное число.

1. При повороте одного из переключателей меняется знак каждого из произведений чисел, находящихся в одной строке таблицы. Если в какой-то момент времени количество строк с произведением равным 1 равно k, то после поворота любого переключателя количество таких произведений будет $2n - k$. А после ещё одного поворота количество строк с произведением равным 1 опять равно k. Таким образом, полностью убрать строки, в которых произведение равно 1, можно лишь в том случае, когда таких строк первоначально $2n$ или 0.

В дальнейшем рассматриваем только случай, когда количество строк с произведением равным 1 равно $2n$ или 0.

2. Рассмотрим часть таблицы размером $(2n)*(2n)$. Преобразуем все переключатели этой части к виду “—” с помощью ниже описанного алгоритма.

3. Инвариантом будет являться положение всех переключателей, кроме выбранного переключателя, если повернуть все переключатели, находящиеся в одном столбце и одной строке с выбранным (выбранный переключатель не поворачиваем). Таким образом, можно изменить вид любого переключателя и постепенно добиться любого положения переключателей.

4. В результате выбранных действий преобразуем так, что переключатели вида “|” могут оставаться только в крайнем левом столбце.

В случае, когда количество строк с произведением равным 1 равно 0, в крайнем левом столбце все переключатели вида “—” и сейф открыт.

В случае, когда количество строк с произведением равным 1 равно $2n$, в крайнем левом столбце все переключатели вида “|”. Повернем $(2n - 1)$ верхних переключателей из крайнего левом столбца и все переключатели, кроме нижнего, из последней строки.

В результате все переключатели примут положение “—”. Пример для таблицы 4 * 5 приведен на рисунках, цветом выделены поворачиваемые переключатели.

|	–	–	–	–	1
|	–	–	–	–	2
|	–	–	–	–	3
|	–	–	–	–	4
a	b	c	d	e	

–	|	|	|	|	1
–	|	|	|	|	2
–	|	|	|	|	3
–	–	–	–	–	4
a	b	c	d	e	

–	–	–	–	–	1
–	–	–	–	–	2
–	–	–	–	–	3
–	–	–	–	–	4
a	b	c	d	e	

Ответ: будем считать, что столбцов в таблице больше, чем строк, если количество строк, содержащих нечетное число переключателей вида “|” равно 0 или $2n$, то сейф открыть можно, в противном случае нельзя.