

11 класс

11.1. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x + y + z + v = 7, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = 1 \end{cases}$ не имеет решений в положительных числах x, y, z, v .

11.2. Последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \dots$ образована по закону: $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ для $n = 1, 2, 3, \dots$. Другая последовательность $y_1, y_2, y_3, \dots$ построена по закону: $y_1 = 3, y_{n+1} = y_n^2 + y_n$ для $n = 1, 2, 3, \dots$. Найдется ли число, принадлежащее одновременно обеим последовательностям?

11.3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH . Оказалось, что $AH=BC$. Докажите, что биссектриса угла B , высота, опущенная из вершины A , и прямая, проходящая через точку H и параллельная стороне BC , пересекаются в одной точке.

11.4. p, q – целые числа, $|p| \leq 100, |q| \leq 100$. Докажите, что если $|f(\sqrt{2} + 1)| < \frac{1}{500}$, где $f(x) = x^2 + px + q$, то $p = -2, q = -1$ (и, следовательно, $f(\sqrt{2} + 1) = 0$).

11.5. Функции $s(x) = \sin x, c(x) = \cos x$ удовлетворяют соотношениям $s^2(x) + c^2(x) = 1, s(2x) = 2s(x)c(x)$. Докажите, что не существует функций $s(x)$ и $c(x)$, удовлетворяющих соотношениям $s^2(x) + c^2(x) = 1, s(2x) = s(x)c(x)$ при всех x ($s(x)$ не равна тождественно нулю). Всё рассматривается в области действительных чисел.