Вариант № 10-2

1. Девочки мелом нарисовали на асфальте 7 прямых, параллельных бордюру. Мальчики пририсовали 5 параллельных между собой прямых, каждая из которых пересекает все прямые, нарисованные девочками. Сколько всего параллелограммов получилось при пересечении этих прямых? (12 баллов)

2. Дан многочлен $P(x)=\dfrac{1}{16}(4x^5-x^3+1)^3(x^4-x+2)$. Найдите все натуральные решения уравнения $Ax+By=37$, где A – сумма коэффициентов многочлена $P(x)$, стоящих при четных степенях x, B - сумма коэффициентов многочлена $P(x)$, стоящих при нечетных степенях x. (12 баллов)

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2+6x+4}-\sqrt{2x^2+3x+5}=\sqrt{3x^2+4x+1}-\sqrt{2x^2+5x+8}.$$ (16 баллов)

4. Решите неравенство

$$\frac{\left(\left|5-x^2\right|-4\right)\left(9x^2+\sqrt{9x^2-1}-1\right)}{\left(\left|x-1\right|-\left|7+x\right|\right)\sqrt{x^2-2x+1}}\geq 0.$$ (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$\frac{2-2a(1-x)}{|x|+x}=\sqrt{1-a+ax}$$

имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения для всякого найденного значения *a*.

(20 баллов)

6. Окружность с центром O_1 радиуса 2 вписана в треугольник ABC. Вторая окружность с центром O_2 радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC, а также стороны BC. Найдите площадь треугольника O_1BO_2, если величина угла ACB равна $120°$.

(20 баллов)

Вариант № 10-2

1. Девочки мелом нарисовали на асфальте 7 прямых, параллельных бордюру, мальчики пририсовали 5 параллельных между собой прямых, каждая из которых пересекает все прямые, нарисованные девочками. Сколько всего параллелограммов могут образоваться при пересечении этих прямых? (12 баллов)

Решение. $C_7^2 \cdot C_5^2 = \dfrac{6\cdot 7}{2}\cdot\dfrac{4\cdot 5}{2} = 210$ **Ответ**: 210

2. Дан многочлен от *x*: $P(x) = \dfrac{1}{16}(4x^5 - x^3 + 1)^3(x^4 - x + 2)$. Найти все натуральные решения уравнения $Ax + By = 37$, где *A* – сумма коэффициентов многочлена *P(x)*, стоящие при четных степенях *x*. *B* - сумма коэффициентов многочлена *P(x)*, стоящие при нечетных степенях *x*. (12 баллов)

Решение. Рассмотрим значения многочлена от 1 и -1.

$P(1) = \dfrac{1}{16}(4-1+1)^3(1-1+2) = 8,\ P(-1) = \dfrac{1}{16}(-4+1+1)^3(1+1+2) = -2,$ тогда сумма четных коэффициентов равна $\dfrac{1}{2}(P(1)+P(-1)) = 3,$ а нечетных $\dfrac{1}{2}(P(1)-P(-1)) = 5$.

Составим требуемое уравнение 3*A*+5*B*=37. Сначала найдем какое-либо решение уравнения 3*A*+5*B*=1, например, *A*=2, *B*= -1, домножив на 37 и подключив линейную комбинацию коэффициентов с целыми значениями параметра *k,* запишем все решения полученного уравнения: $\begin{cases} x = 74 - 5k,\ k\in Z, \\ y = -37 + 3k, k \in Z. \end{cases}$ Поскольку требуются натуральные решения, подбираем *k* так, чтобы *x* и *y* были строго больше 0, $\begin{cases} 5k < 74, \\ 3k > 37, \end{cases} \Rightarrow 12 < k \le 14,\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 13, \\ k = 14, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9; y = 2, \\ x = 4; y = 5. \end{array}\right.$

Ответ: (9; 2) и (4; 5)

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2+6x+4} - \sqrt{2x^2+3x+5} = \sqrt{3x^2+4x+1} - \sqrt{2x^2+5x+8}.$$ (16 баллов)

Решение. Перепишем уравнение в более удобном виде:

$$\sqrt{3x^2+6x+4} - \sqrt{3x^2+4x+1} = \sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2+5x+8}.$$

Домножим обе части уравнения и разделим на сопряженные выражения, не равные нулю

$$\frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+6x+4}+\sqrt{3x^2+4x+1}} = \frac{-(2x+3)}{\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2+5x+8}.}$$

Поскольку знаменатели всегда больше нуля, вынесем числители за скобку.

$$(2x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+6x+4}+\sqrt{3x^2+4x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2+5x+8}}\right)=0$$

Получаем $\begin{cases} 2x+3=0, \\ 3x^2+4x+1\geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3/2, \\ 3(x+1/3)(x+1)\geq 0, \end{cases}$ **Ответ**: -1.5

4. Решите неравенство

$$\frac{\left(\left|5-x^2\right|-4\right)\left(9x^2+\sqrt{9x^2-1}-1\right)}{\left(|x-1|-|7+x|\right)\sqrt{x^2-2x+1}}\geq 0.$$ (20 баллов)

Решение. Домножим числитель и знаменатель на выражение, знак которого строго больше 0:

$$\frac{\left(\left|5-x^2\right|-4\right)\left(\left|5-x^2\right|+4\right)\left(9x^2+\sqrt{9x^2-1}-1\right)}{\left(|x-1|-|7+x|\right)\left(|x-1|+|7+x|\right)\sqrt{x^2-2x+1}}\geq 0.$$

$$\frac{\left(\left|5-x^2\right|^2-16\right)\left(9x^2-1+\sqrt{9x^2-1}\right)}{\left(|x-1|^2-|7+x|^2\right)|x-1|}\geq 0.$$ Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x\neq 1, \\ 9x^2-1\geq 0, \\ \dfrac{(1-x^2)(9-x^2)}{-8(2x+6)}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 1/3, \\ x\leq -1/3, \end{array}\right. \\ \dfrac{(1-x)(1+x)(3-x)(3+x)}{(x+3)}\leq 0 \end{cases}$$

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-1]\cup\{-1/3;\,1/3\}\cup(1;3).$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{2-2a(1-x)}{|x|+x}=\sqrt{1-a+ax}$$

имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения для всякого найденного значения a.
(20 баллов)

Решение. При $x\leq 0$ решений нет. Рассмотрим $x>0$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$\frac{1-a+ax}{x}=\sqrt{1-a+ax} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-a+ax}=0, \\ \dfrac{\sqrt{1-a+ax}}{x}=1. \end{array}\right.$$

Решая первое уравнение, находим $x=\dfrac{a-1}{a}>0 \;\Rightarrow\; a\in(-\infty,\,0)\cup(1,+\infty)$. Рассмотрим второе уравнение $\dfrac{\sqrt{1-a+ax}}{x}=1 \;\Rightarrow\; \sqrt{1-a+ax}=x$, учитывая ограничения, получаем

$$1-a+ax=x^2 \;\Rightarrow\; x^2-ax+a-1=0,\; D=a^2-4a+4=(a-2)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=a-1>0 \;\;\Rightarrow\; a>1, \\ x_2=1>0. \end{array}\right.$$

Окончательно получаем **ответ:**

$$\begin{array}{ll} a<0, & x=\dfrac{-1+a}{a},\; x=1, \\ 0\le a\le 1, & x=1, \\ 1<a<2, & x=\dfrac{-1+a}{a},\; x=1,\; x=-1+a, \\ a=2, & x=1,\, x=1/2, \\ a>2, & x=\dfrac{-1+a}{a},\; x=1,\; x=-1+a. \end{array}$$

6. Окружность с центром O_1 радиуса 2 вписана в треугольник ABC. Вторая окружность с центром O_2 радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC, а также стороны BC. Найдите площадь треугольника O_1BO_2, если величина угла ACB равна $120°$. (20 баллов)

Решение. Т.к. центры окружностей лежат на биссектрисах, а углы ABC *и* BCA_2, где A_2 некоторая точка находящаяся на луче *AB* по разные стороны с точкой *A* относительно точки *B,* образуют развернутый угол, то треугольник O_1BO_2 – прямоугольный.

$$CD=\frac{O_1D}{tg60}=\frac{2}{\sqrt3},\; EC=\frac{O_2E}{tg30}=\frac{4}{1/\sqrt3}=4\sqrt3,\;\Rightarrow ED=EC-CD=4\sqrt3-\frac{2}{\sqrt3}=\frac{10}{\sqrt3}$$

$$\triangle O_2EM\sim\triangle O_1DM \;\Rightarrow EM=2MD=2/3ED=2/3\cdot10/\sqrt3=20/(3\sqrt3)\Rightarrow$$

$$\mathrm{BM}=2/\sqrt3+20/(3\sqrt3)=26/(3\sqrt3)$$

$$S=1/2\cdot BM\cdot(O_1D+O_2E)=3BM=26/\sqrt3.$$

Ответ: $26/\sqrt3$