Открытая олимпиада школьников по математике

12 марта 2017 г.

10 класс

Решения

1 вариант

1. (2 балла) Что больше: $\frac{1}{50}+\frac{1}{51}+\ldots+\frac{1}{150}$ или $\frac{2}{150}+\frac{2}{151}+\ldots\frac{2}{250}$?

Ответ: Первая сумма больше.

Решение: Перепишем вторую сумму как $\frac{1}{75}+\frac{1}{75,5}+\ldots\frac{1}{125}$. У неё одинаковое количество слагаемых с первой суммой, причём среднее слагаемое $\frac{1}{100}$ общее.

Сравним пары слагаемых $\frac{1}{100-k}+\frac{1}{100+k}=\frac{1}{100^2-k^2}$ и $\frac{1}{100-\frac{k}{2}}+\frac{1}{100+\frac{k}{2}}=\frac{1}{100^2-\frac{k^2}{4}}$. Первая пара слагаемых очевидно больше, значит, первая сумма больше.

2. (2 балла) На доске записали дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$, а также все остальные дроби, получающиеся из неё перестановкой чисел a, b, c, d, кроме имеющих тождественно нулевой знаменатель. Могло ли так получится, что среди выписанных дробей ровно 7 различных?

Ответ: Да.

Решение: Например, возьмём числа 2, 1, 0, 0. Всего 4 числа, из которых два одинаковых, можно расставить 12 способами. Два из них имеют нулевой знаменатель, т.е. не рассматриваются. Осталось 10.

Два варианта нашей дроби нулевые. Ещё есть дроби $\frac{2x}{1}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{2x}{x}=\frac{2}{1}$ и ещё столько же обратных к ним.

3. (2 балла) Один двоечник написал следующие неверные формулы синуса и косинуса суммы: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ и $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$. В свое оправдание он сказал, что при некоторых α и β его формулы всё же верны. Найдите все такие пары (α,β).

Ответ: $\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$ и $\beta=\mp\frac{\pi}{3}+2\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

Решение:

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta\end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0\\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta=2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{\alpha-\beta}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

В первом случае $\cos\alpha=\cos\beta$. Таким образом, формула “косинуса суммы” превращается в $1=2\cos\alpha$, откуда $\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$ и, соответственно, $\beta=\mp\frac{\pi}{3}+2\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

Во втором случае мы получаем либо $\beta=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ или $\alpha=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Тогда второе равенство превращается в $\cos\alpha=1+\cos\alpha$ или аналогичное равенство для β, что невозможно. Значит, остаётся только первый случай.

4. (3 балла) На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 10 см. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно. Найдите $AX\cdot AB+CY\cdot BC$.

Ответ: 400

Решение: Пусть точка M — середина стороны AC, она же центр окружности. Тогда $AB\cdot BX=BC\cdot BY=(BM+10)(BM-10)$. Тогда $BX=\frac{BM^2-100}{AB}=\frac{2AB^2+2BC^2-400-400}{4AB}$. Соответственно, $AX=AB-\frac{2AB^2+2BC^2-800}{4AB}=\frac{2AB^2-2BC^2+800}{4AB}$.

аналогично $CY=\frac{2BC^2-2AB^2+800}{4BC}$. Тогда $AX\cdot AB+CY\cdot BC=\frac{1600}{4}=400$.

5. (3 балла) Вписанная окружность четырёхугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, F, G и H соответственно. Прямые EH и GH пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Оказалось, что $BK=BF$. Докажите, что $CL=CF$.

Доказательство: $BK=BF=BE$, следовательно треугольник KFE прямоугольный с прямым углом $\angle KEF$. Но $\angle KEF=\angle HEF$. Значит, $\angle HEF$ прямой, но $\angle HEF+\angle HGF=180^\circ$, следовательно, $\angle HGF$ тоже прямой, и смежный к нему $\angle LGF$ тоже.

Рассмотрим окружность с центром в точке C и радиусом $CF=CG$. Она вторично пересекает прямую BC в точке L' и $CL'=CF=CG$. Но, поскольку $\angle L'GF$ также прямой, L и L' это одна и та же точка, тогда $CL=CF$, что и требовалось.

6. (3 балла) Последовательность задана следующими соотношениями: $x_1=5$, $x_{n+1}=x_n+\sin x_n$. Докажите, что $x_n>\pi$

Доказательство: Докажем по индукции неравенство $\pi < x_n < 2\pi$. База $n = 1$, $\pi < 5 < 2\pi$.

Переход от n к $n+1$. Пусть $\pi < x_n < 2\pi$, тогда $\sin x_n < 0$, и следовательно, $x_{n+1} < x_n < 2\pi$. С другой стороны, $\sin x_n = -\sin(x_n - \pi) > -(x_n - \pi)$, так как для положительных углов выполняется неравенство $\sin\alpha < \alpha$. Значит, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n > x_n - (x_n - \pi) = \pi$, что и требовалось доказать.

Замечание: на самом деле можно также доказать, что число π является пределом последовательности x_n.

7. (4 балла) Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 1. Все три коэффициента в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию из трёх элементов с разностью q. Найдите все возможные значения q, если известно, что это рациональное число и разность корней $f(x)$ равна q.

Ответ: Решений нет.

Решение: Коэффициенты трёхчлена имеют следующий вид: a, aq, aq^2 в некотором порядке. Корни можно представить как b и $b+q$.

Первый случай: $a = 1$, два других коэффициента: q и q^2.

Подслучай 1.1: $2b + q = -q \Rightarrow b = q$. Далее, $b(b+q) = q^2 \Rightarrow q \cdot 2q = q^2$ откуда $q = 0$, что невозможно из определения геометрической прогрессии.

Подслучай 1.2: $2b+q = -q^2 \Rightarrow b = \dfrac{-q^2-q}{2}$. Далее, $b(b+q) = q \Rightarrow q^2(q+1)(q-1) = 4q$ откуда снова $q = 0$, что невозможно из определения геометрической прогрессии. Другие рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ± 1, $\pm\frac{1}{5}$, легко убедится, что они не подходят.

Второй случай: $aq = 1$, два других коэффициента: $\frac{1}{q}$ и q.

Подслучай 2.1: $2b + q = -\frac{1}{q} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-\frac{1}{q} - q) = -\frac{1+q^2}{2q}$. Далее, $b(b+q) = q \Rightarrow (1+q^2)(1-q^2) = 4q^3$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ± 1, легко убедится, что они не подходят.

Подслучай 2.2: $2b + q = -q \Rightarrow b = -q$. Далее, $b(b+q) = \frac{1}{q} \Rightarrow 0 = \frac{1}{q}$ — нет решений

Третий случай: $aq^2 = 1$, два других коэффициента: $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q^2}$

Подслучай 3.1: $2b+q = -\frac{1}{q} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-q-\frac{1}{q}) = -\frac{1+q^2}{2q}$. Далее, $b(b+q) = \frac{1}{q^2} \Rightarrow (1+q^2)(1-q^2) = 4 \Rightarrow 5 - q^4 = 0$. Рациональных корней нет.

Подслучай 3.2: $2b + q = -\frac{1}{q^2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-q - \frac{1}{q^2}) = -\frac{1+q^3}{2q^2}$. Далее, $b(b+q) = \frac{1}{q} \Rightarrow (1+q^3)(1-q^3) = 4 * q^3$ Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ± 1.

Таким образом все случаи разобраны, рациональных решений нет.

8. (5 баллов) Таблица 10×10 заполнена нулями. За одну операцию в таблице находится минимальное число (если таких несколько — выбирается любое) и к нему, а также ко всем числам, стоящим в соседних с ним по стороне или углу клетках, добавляется единица. Какое наибольшее число может оказаться в одной из клеток таблицы через 80 операций?

Ответ: 20.

Решение: Назовём n-ой фазой несколько подряд идущих операций, который применяются к числам, равным n. Если таких операций не было, будем говорить, что данная фаза состоит из нуля операций. Начинается всё с нулевой фазы.

В течении одной фазы никакое число не может увеличится больше, чем на 4. Действительно, если мы увеличили само число, то ни к нему, ни к его соседям не может быть применена наша операция в течение этой фазы ни до, не после, поскольку число, увеличенное на один в некоторой фазе, не может оказаться минимальным в течении той же самой фазы. Среди соседей числа можно выбрать не больше 4 не соседних между собой, значит, действительно мы можем увеличить число не больше, чем на 4 за одну фазу.

Рассмотрим первые, четвёртые, седьмые и десятые клетки в первой, четвёртой, седьмой и десятой строках таблицы, всего 16 штук. Заметим, что никакая операция не затрагивает две из них. Значит, чтобы сменилось n фаз, надо совершить хотя бы $16n$ операций. (**Важно!** Мы не можем утверждать, что одна фаза длится хотя бы 16 операций, так как некоторые из наших чисел могли быть увеличены на предыдущих фазах)

Значит, у нас прошло не более 5 фаз и в каждой никакое число не могло увеличится более, чем на 4. Следовательно, за 80 операций никакое число не могло стать больше, чем 20.

Пример строится следующим образом: рассмотрим вторые, четвёртые, седьмые и десятые клетки во второй, четвёртой, седьмой и десятой строках таблицы, всего 16 штук. Будем применять операции только к ним. Операции, применённые к одной из этих клеток, не затрагивают остальные 15, и при этом после применения операций ко всем 16 клеткам все числа в таблице увеличиваются хотя бы на 1. При этом число в третьей клетке третьей строки будет каждую фазу увеличиваться на 4.

Разумеется, пример не единственный.

2 вариант

1. (2 балла) Что больше: $\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{26}+\ldots+\dfrac{1}{75}$ или $\dfrac{2}{75}+\dfrac{2}{76}+\ldots\dfrac{2}{125}$?

Ответ: Первая сумма больше.

Решение: Перепишем вторую сумму как $\dfrac{1}{37,5}+\dfrac{1}{38}+\ldots\dfrac{1}{62,5}$. У неё одинаковое количество слагаемых с первой суммой, причём среднее слагаемое $\dfrac{1}{50}$ общее.

Сравним пары слагаемых $\dfrac{1}{50-k}+\dfrac{1}{50+k}=\dfrac{1}{50^2-k^2}$ и $\dfrac{1}{50-\frac{k}{2}}+\dfrac{1}{50+\frac{k}{2}}=\dfrac{1}{50^2-\frac{k^2}{4}}$. Первая пара слагаемых очевидно больше, значит, первая сумма меньше.

2. (2 балла) На доске записали дробь $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, а также все остальные дроби, получающиеся из неё перестановкой чисел a, b, c, d, кроме имеющих тождественно нулевой знаменатель. Могло ли так получится, что среди выписанных дробей ровно 5 различных?

Ответ: Да.

Решение: Например, возьмём числа 2, 2, 1, 1. Всего 4 числа, из которых две пары одинаковых, можно расставить 6 способами, но среди них два совпадают.

Наши дроби это $\dfrac{2x+2}{x+1}$, $\dfrac{2x+1}{2x+1}=\dfrac{x+2}{x+2}$, $\dfrac{x+1}{2x+2}$, $\dfrac{1x+2}{2x+1}$, $\dfrac{2x+1}{x+2}$.

3. (2 балла) Один двоечник написал следующие неверные формулы синуса и косинуса разности: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$ и $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$. В свое оправдание он сказал, что при некоторых α и β его формулы всё же верны. Найдите все такие пары (α,β).

Ответ: $\alpha=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ и $\beta=\mp\dfrac{\pi}{3}+2\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

Решение:

$$\begin{cases}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta\end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0\\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha-\beta=2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\pm\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

В первом случае $\cos\alpha=\cos\beta$. Таким образом, формула “косинуса суммы” превращается в $1=0$, что невозможно.

Во втором случае мы получаем либо $\beta=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ или $\alpha=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Тогда второе равенство превращается в $\cos\alpha=\cos\alpha-1$, что невозможно, или $\cos\beta=1-\cos\beta$, откуда $\beta=\mp\dfrac{\pi}{3}+2\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

4. (3 балла) На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 20 см. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Найдите $BX\cdot AB+CY\cdot AC$.

Ответ: 1600

Решение: Пусть точка M — середина стороны BC, она же центр окружности. Тогда $AB\cdot AX=AC\cdot AY=(AM+20)(AM-20)$. Тогда $AX=\dfrac{AM^2-400}{AB}=\dfrac{2AB^2+2AC^2-1600-1600}{4AB}$. Соответственно, $BX=AB-\dfrac{2AB^2+2AC^2-3200}{4AB}=\dfrac{2AB^2-2AC^2+3200}{4AB}$.

аналогично $CY=\dfrac{2AC^2-2AB^2+3200}{4AC}$. Тогда $BX\cdot AB+CY\cdot AC=\dfrac{6400}{4}=1600$.

5. (3 балла) Вписанная окружность четырёхугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, F, G и H соответственно. Прямые EF и EH пересекают прямую CD в точках Q и P соответственно. Оказалось, что $CQ=CG$. Докажите, что $DP=DH$.

Доказательство: $Q=CG=CF$, следовательно треугольник GFQ прямоугольный с прямым углом $\angle GFQ$. Но $\angle GFQ=\angle GFE$. Значит, $\angle GFE$ прямой, но $\angle GFE+\angle GHE=180^\circ$, следовательно, $\angle GHE$ тоже прямой, и смежный к нему $\angle GHP$ тоже.

Рассмотрим окружность с центром в точке D и радиусом $DH=DG$. Она вторично пересекает прямую CD в точке P' и $DP'=DH=DG$. Но, поскольку $\angle P'HG$ также прямой, P и P' это одна и та же точка, тогда $DP=DH$, что и требовалось.

6. (3 балла) Последовательность задана следующими соотношениями: $x_1=7$, $x_{n+1}=x_n+\sin x_n$. Докажите, что $x_n<3\pi$

Доказательство: Докажем по индукции неравенство $2\pi<x_n<3\pi$. База $n=1$, $2\pi<7<3\pi$.

Переход от n к $n+1$. Пусть $2\pi<x_n<3\pi$, тогда $\sin x_n>0$, и следовательно, $x_{n+1}>x_n>2\pi$. С другой стороны, $\sin x_n=\sin(3\pi-x_n)<(3\pi-x_n)$, так как для положительных углов выполняется неравенство $\sin\alpha<\alpha$. Значит, $x_{n+1}=x_n+\sin x_n<x_n+(3\pi-x_n)=3\pi$, что и требовалось доказать.

Замечание: на самом деле можно также доказать, что число 3π является пределом последовательности x_n.

7. (4 балла) Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 1. Все три коэффициента в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию из трёх элементов с разностью d. Найдите все возможные значения d, если известно, что это рациональное число и корни $f(x)$ отличаются друг от друга в d раз.

Ответ: -1, $-\frac{1}{2}$.

Решение: Коэффициенты трёхчлена имеют следующий вид: a, $a+d$, $a+2d$ в каком-то порядке. Корни трёхчлена можно представить как b и bd.

Первый случай: $a = 1$, два других коэффициента: $1+d$ и $1+2d$.

Подслучай 1.1: $b+bd = -1-d$, значит, $b = -1$ или $d = -1$. Если $b = -1$, пишем также равенство на свободный член: $b^2d = 1+2d \Rightarrow d = 1+2d \Rightarrow d = -1$.

Подслучай 1.2: $b+bd = -1-2d \Rightarrow b = -\dfrac{1+2d}{1+d}$. Далее, $b^2d = 1+d \Rightarrow d(1+2d)^2 = (1+d)^3 \Rightarrow 3d^3+d^2-2d-1 = 0$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ±1, $\pm\frac{1}{3}$, легко убедится, что они не подходят.

Второ случай: $a+d = 1$, два других коэффициента: $1-d$, $1+d$

Подслучай 2.1: $b+bd = -1+d \Rightarrow b = -\dfrac{1-d}{1+d}$. Далее, $b^2d = 1+d = \Rightarrow d(1-d)^2 = (1+d)^3 \Rightarrow 5d^2+2d+1 = 0$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ±1, $\pm\frac{1}{5}$, легко убедится, что они не подходят.

Подслучай 2.2: $b+bd = -1-d$, значит, $b = -1$ или $d = -1$. Если $b = -1$, пишем также равенство на свободный член: $b^2d = 1-d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$.

Третий случай: $a+2d = 1$, два других коэффициента: $1-2d$, $1-d$.

Подслучай 3.1: $b+bd = -1+2d \Rightarrow b = -\dfrac{1-2d}{1+d}$. Далее, $b^2d = 1-d \Rightarrow d(1-2d)^2 = (1-d)*(1+d)^2 \Rightarrow 5d^3-3*d^2-1 = 0$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ±1, $\pm\frac{1}{5}$, легко убедится, что они не подходят.

Подслучай 3.2: $b+bd = -1+d \Rightarrow b = \dfrac{1-d}{1+d}$. Далее, $b^2d = 1-2d \Rightarrow d(1-d)^2 = (1-2d)(1+d)^2 \Rightarrow 3d^3+d^2+d-1 = 0$ Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ±1, $\pm\frac{1}{5}$, легко убедится, что они не подходят.

8. (5 баллов) Таблица 7×7 заполнена нулями. За одну операцию в таблице находится минимальное число (если таких несколько — выбирается любое) и к нему, а также ко всем числам, стоящим в соседних с ним по стороне или углу клетках, добавляется единица. Какое наибольшее число может оказаться в одной из клеток таблицы через 90 операций?

Ответ: 40.

Решение: Назовём n-ой фазой несколько подряд идущих операций, который применяются к числам, равным n. Если таких операций не было, будем говорить, что данная фаза состоит из нуля операций. Начинается всё с нулевой фазы.

В течении одной фазы никакое число не может увеличится больше, чем на 4. Действительно, если мы увеличили само число, то ни к нему, ни к его соседям не может быть применена наша операция в течение этой фазы ни до, не после, поскольку число, увеличенное на один в некоторой фазе, не может оказаться минимальным в течении той же самой фазы. Среди соседей числа можно выбрать не больше 4 не соседних между собой, значит, действительно мы можем увеличить число не больше, чем на 4 за одну фазу.

Рассмотрим первые, четвёртые и седьмые клетки в первой, четвёртой и седьмой строках таблицы, всего 9 штук. Заметим, что никакая операция не затрагивает две из них. Значит, чтобы сменилось n фаз, надо совершить хотя бы $9n$ операций. (**Важно!** Мы не можем утверждать, что одна фаза длится хотя бы 9 операций, так как некоторые из наших чисел могли быть увеличены на предыдущих фазах)

Значит, у нас прошло не более 10 фаз и в каждой никакое число не могло увеличится более, чем на 4. Следовательно, за 90 операций никакое число не могло стать больше, чем 40.

Пример строится следующим образом: рассмотрим вторые, четвёртые и шестые клетки во второй, четвёртой и шестой строках таблицы, всего 9 штук. Будем применять операции только к ним. Операции, применённые к одной из этих клеток, не затрагивают остальные 8, и при этом после применения операций ко всем 9 клеткам все числа в таблице увеличиваются хотя бы на 1. При этом число в третьей клетке третьей строки будет каждую фазу увеличиваться на 4.

Разумеется, пример не единственный.