Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

26 августа 2019 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 1**

. . . .

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Решите уравнение $(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x+23} = 0$.
2. Прямая l_1 проходит через точки $(-3, 2)$ и $(1, 1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5, 4)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найдите координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.
3. Решите неравенство
$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \geqslant -1.$$
4. Ученик шёл от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. В другой раз он пошёл со скоростью 4 км/ч и пришёл за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ученику нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока, если он выходит из дома каждый раз в одно и то же время?
5. Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трёх нападающих, если в его распоряжении есть 3 вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?
6. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$ образуют четырёхугольник $EFGH$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найдите сумму квадратов длин всех сторон четырёхугольника $EFGH$, если $AB = BC + \frac{3}{2}$.
7. Докажите неравенство
$$\frac{ad+bc}{bd} + \frac{bc+ad}{ac} \geqslant 4,$$
если $a, b, c, d > 0$.
8. Поместится ли треугольник со сторонами 5, 6 и 7 в круге диаметром $\sqrt{50}$?
9. За 2017 год число книг в фонде библиотеки посёлка увеличилось на 0,4%, а за 2018 год — на 0,8%, оставаясь при этом всегда меньше 60 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки посёлка за 2018 год?
10. Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения
$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0$$
имеется ровно один отрицательный.

Часть 2

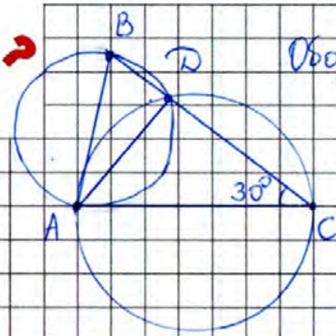
К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.*
2) *Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.*

11. Найдите все такие натуральные числа n, что значение выражения $n^4 + 4$ является простым числом.

Поскольку $n^4+4=(n^2)^2+2^2$,
это сумма квадратов,
а она на множители не разлагается.
Значит, n^4+4 – простое при всех n.
Ответ: $n\in\mathbb{N}$.

12. Угол C треугольника ABC равен 30°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $BD : DC = 1 : 6$. Найдите косинус угла A.



Обозначим $BD = a$,
тогда $CD = 6a$.
$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$
(опираются на диаметр)
$\Rightarrow AD$ – высота
$\triangle ACD$ – прямоуг., $\angle C = 30^\circ$
$AD = 2\sqrt{3}a$, $AC = 4\sqrt{3}a$
Т. Пифагора для $\triangle ABD$: $AB = \sqrt{AD^2+BD^2} = \sqrt{13}a$
Т. косинусов для $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 -$
$- 2 \cdot AB \cdot AC \cos A$
$\Rightarrow \cos A = \dfrac{48a^2+13a^2-49a^2}{8\sqrt{39}a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$ Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

26 августа 2019 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 2**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Решите уравнение $\sqrt{3x+7}\,(x^2-5|x|+6)=0$.
2. Прямая l_1 проходит через точки $(4,5)$ и $(7,6)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(3,-5)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найдите координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.
3. Решите неравенство
$$\frac{(x+1)(x+4)(x+8)}{(x-1)(x-4)(x-8)} \geqslant -1.$$
4. Студент шёл от общежития до университета со скоростью 4 км/ч и опоздал на лекцию на 5 мин. В другой раз он пошёл со скоростью 5 км/ч и пришёл за 1 мин до начала лекции. С какой скоростью студенту нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу лекции, если он выходит из общежития каждый раз в одно и то же время?
5. Сколькими способами можно сформировать туристическую группу, состоящую из одного руководителя, трёх мальчиков и двух девочек, если имеются 2 руководителя, 7 мальчиков и 8 девочек?
6. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $KLMN$ образуют четырёхугольник $PQRS$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найдите сумму квадратов длин всех сторон четырёхугольника $PQRS$, если $KL-LM=\sqrt{7}$.
7. Докажите неравенство
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geqslant 4,$$
если $a,b,c,d>0$.
8. Поместится ли круг радиусом 1,2 в треугольник со сторонами 4, 5 и 7?
9. Численность населения города, не превышавшая 50 тысяч человек, за 1994 год сократилась на 1,2%, а за 1995 год — на 2,4%. На сколько человек сократилась численность населения города за 1995 год?
10. Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения
$$(a-1)x^2-(a+3)x+a=0$$
имеется ровно один положительный.

Часть 2

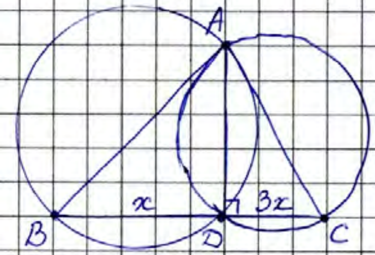
К задачам 11—12 приведены рукописные тексты решений.
1) Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.
2) Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.

11. Найдите все натуральные числа n, при которых значение выражения $4n^4+1$ является простым числом.

Поскольку $4n^4+1=(2n^2)^2+1^2$, это сумма квадратов, а она на множители не разлагается. Значит, $4n^4+1$ – простое при всех n.

Ответ: $n\in\mathbb{N}$.

12. В треугольнике ABC угол C равен $60°$. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности, D — точка пересечения этих окружностей, отличная от точки A. Найдите синус угла A, если $DB:DC=1:3$.



Пусть $DB=x$, тогда $DC=3x$.

$\angle ADB=\angle ADC=90°$ (опираются на диаметр) $\Rightarrow$ AD – висота.

$\triangle ACD$ – прямоуг. с углом $30°$ $\Rightarrow$ $AC=6x$, $AD=3\sqrt{3}x$

$\triangle ABD$ – прямоуг. $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=2\sqrt{7}x$

Теорема синусов $\triangle ABC$: $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$

$\frac{2\sqrt{7}x}{\sqrt{3}/2}=\frac{4x}{\sin A} \Rightarrow \sin A=\sqrt{\frac{3}{7}}$ Ответ: $\sqrt{\frac{3}{7}}$