

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что уравнение $x+x^2 = y+y^2+y^3$ не имеет решений в натуральных числах.

2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Доска $2n \times 2n$ покрашена в шахматном порядке. При каких n можно так поставить на неё $2n$ не бьющих друг друга ладей, чтобы n из них стояли на чёрных клетках, а n — на белых?

3. Ненулевые вещественные числа a , b и c таковы, что $a^2+a = b^2$, $b^2+b = c^2$, $c^2+c = a^2$. Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

4. На диагоналях параллелограмма $ABCD$ как на основаниях построены равносторонние треугольники ACM и BDN . Докажите, что отрезок MN перпендикулярен одной из сторон параллелограмма.

5. Пусть n — натуральное число. Докажите, что

$$C_{2n+1}^n = 2^0 C_n^0 C_n^{[n/2]} + 2^1 C_n^1 C_{n-1}^{[(n-1)/2]} + \dots + 2^k C_n^k C_{n-k}^{[(n-k)/2]} + \dots + 2^n C_n^n C_0^0.$$

($C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число способов выбрать k предметов из n без учёта

порядка; $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x .)

6. Куб $n \times n \times n$ состоит из единичных кубиков. Рассмотрим всевозможные кубы, содержащиеся в этом кубе и составленные из единичных кубиков. Будем говорить, что один такой куб *содержится внутри* другого такого куба, если все его кубики принадлежат другому кубу и не лежат на его гранях. Какое наибольшее количество кубов со стороной больше 1 можно выбрать так, чтобы ни один из них не содержался внутри другого?

7. В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $45^\circ < \angle C < 60^\circ$. Точка M — середина стороны BC . Перпендикуляр к AM , проведенный через C , пересекает катет AB в точке D . На стороне AC взяли точку E ; K — точка пересечения прямых CD и BE . Докажите, что если $BK = 2AE$, то треугольник CEK — равнобедренный.

8. Про действительные числа a , b и c известно, что $|a| < 1$, $|b| < 1$, $|c| < 1$, а также

$$|a+b| \leq 1+c, |a-b| \leq 1-c. \text{ Докажите, что } \frac{(a+b)^2}{2(1+c)} + \frac{(a-b)^2}{2(1-c)} \leq a^2 + 2b^2 + 2c^2.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что уравнение $x+x^2 = y+y^2+y^3$ не имеет решений в натуральных числах.
2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Доска $2n \times 2n$ покрашена в шахматном порядке. При каких n можно так поставить на неё $2n$ не бьющих друг друга ладей, чтобы n из них стояли на чёрных клетках, а n — на белых?
3. Ненулевые вещественные числа a , b и c таковы, что $a^2+a = b^2$, $b^2+b = c^2$, $c^2+c = a^2$. Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.
4. На диагоналях параллелограмма $ABCD$ как на основаниях построены равносторонние треугольники ACM и BDN . Докажите, что отрезок MN перпендикулярен одной из сторон параллелограмма.
5. Торговец купил 20 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может переливать лимонад из полной бочки в пустую. За какое наименьшее количество переливаний он заведомо сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?
6. Квадрат 100×100 состоит из единичных квадратиков. Рассмотрим всевозможные содержащиеся в нём квадраты, составленные из единичных квадратиков. Будем говорить, что один такой квадрат *содержится внутри* другого такого квадрата, если все его квадратики принадлежат другому квадрату и не примыкают к его сторонам. Какое наибольшее количество квадратов со стороной больше 1 можно выбрать таким образом, чтобы ни один из них не содержался внутри другого?
7. В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $45^\circ < \angle C < 60^\circ$. Точка M — середина стороны BC . Перпендикуляр к AM , проведенный через C , пересекает катет AB в точке D . На стороне AC взяли точку E ; K — точка пересечения прямых CD и BE . Докажите, что если треугольник CEK — равнобедренный, то $BK = 2AE$.
8. Сумма положительных чисел a , b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2019} < \frac{a}{2018+a^3} + \frac{b}{2018+b^3} + \frac{c}{2018+c^3} < \frac{1}{2018}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все пары натуральных чисел a, b , для которых $a \cdot [a, b] = 4(a, b)$. (Здесь $[a, b]$ и (a, b) обозначают соответственно, как и должно, наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел a и b .)
2. В стране некоторые города соединены двусторонними авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в стране более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.
3. Ненулевые вещественные числа a, b и c таковы, что $a^2 + a = b^2$, $b^2 + b = c^2$, $c^2 + c = a^2$. Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.
4. На диагоналях параллелограмма $ABCD$ как на основаниях построены равносторонние треугольники ACM и BDN . Докажите, что отрезок MN перпендикулярен одной из сторон параллелограмма.
5. Торговец купил 111 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может перелить лимонад из полной бочки в пустую. Всегда ли торговец за не более, чем 166 переливаний сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?
6. Квадрат 100×100 состоит из единичных квадратиков. Рассмотрим всевозможные содержащиеся в нём квадраты, составленные из единичных квадратиков. Будем говорить, что один такой квадрат *содержится внутри* другого такого квадрата, если все его квадратiki принадлежат другому квадрату и не примыкают к его сторонам. Какое наибольшее количество квадратов со стороной больше 1 можно выбрать таким образом, чтобы ни один из них не содержался внутри другого?
7. В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $45^\circ < \angle C < 60^\circ$. Точка M — середина стороны BC . Перпендикуляр к AM , проведенный через C , пересекает катет AB в точке D . На стороне AC взяли точку E ; K — точка пересечения прямых CD и BE . Докажите, что если треугольник CEK — равнобедренный, то $BK = 2AE$.
8. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a}{2018 + a^3} + \frac{b}{2018 + b^3} + \frac{c}{2018 + c^3} < \frac{1}{2018}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019**МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Дано натуральное число $n \geq 100$. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски $2 \times n$ в синий и красный цвета (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Когда все клетки закрашены, первый подсчитывает количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, а второй подсчитывает количество пар соседних по стороне разноцветных клеток. Выигрывает тот из них, чье число больше. В случае равенства фиксируется ничья. Может ли кто-нибудь из игроков обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника? Если да, то кто именно?

2. По кругу расставлены числа $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$. Каждое из чисел равно 2018, 2019 или 2020, причем соседние числа различны. Докажите, что

$$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - a_4a_5 + \dots - a_{2n-2}a_{2n-1} + a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_1 = 0.$$

3. С натуральным числом разрешается делать следующую операцию: выбрать в его десятичной записи две подряд идущие цифры a и b и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab . Если при этом в начале десятичной записи числа получаются нули, то все эти нули стирают. Например, из числа 251023 последовательно можно получить числа 25106, 106, 10 и пусто. Дано сто чисел без пятерок в десятичной записи. Докажите, что все эти сто чисел можно получить из одного и того же изначального числа с помощью таких операций.

4. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Общее количество дорог равно $2(k-1)^2$. Докажите, что либо в стране есть город, из которого выходит хотя бы k дорог, либо есть k дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

5. Найдите все натуральные числа m и n , для которых $|4m^2 - n^{n+1}| \leq 3$.

6. Виноторговец купил сто бочек одинакового размера с винами ста разных сортов. На каждой бочке выгравировано название сорта. Он продегустировал все вина и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта вин указаны правильно, но некоторые вина налиты в другие бочки. У торговца есть пустая бочка такого же размера, на которой ничего не написано. За одну операцию он может перелить все вино из какой-либо бочки в пустую. За какое наименьшее количество операций виноторговец заведомо сможет добиться того, чтобы в каждой бочке было вино того сорта, который на ней выгравирован?

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2019} < \frac{a}{2018+a^3} + \frac{b}{2018+b^3} + \frac{c}{2018+c^3} < \frac{1}{2018}.$$

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена такая точка E , что $\angle ABE = 60^\circ$, а на луче BA отмечена такая точка F , что $BE = BF$. Отрезки EF и AD пересекаются в точке M . Биссектриса угла CBE пересекает сторону CD в точке N . Докажите, что треугольник BMN — равнобедренный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019**МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски 2×2019 в синий и красный цвета (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Когда все клетки закрашены первый подсчитывает количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, а второй подсчитывает количество пар соседних по стороне разноцветных клеток. Выигрывает тот из них, чье число больше. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

2. По кругу расставлены числа $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$. Каждое из чисел равно 1, 2 или 3, причем соседние числа различны. Докажите, что

$$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - a_4a_5 + \dots - a_{2n-2}a_{2n-1} + a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_1 = 0.$$

3. С натуральным числом разрешается делать следующую операцию: выбрать в его десятичной записи две подряд идущие цифры a и b и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab . Если при этом в начале десятичной записи числа получаются нули, то все эти нули стирают. Например, из числа 251023 последовательно можно получить числа 25106, 106, 10 и пусто. Дано сто чисел без нулей и пятерок в десятичной записи. Докажите, что все эти сто чисел можно получить из одного и того же изначального числа с помощью таких операций.

4. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Общее количество дорог равно $2(k-1)^2$. Докажите, что либо в стране есть город, из которого выходит хотя бы k дорог, либо есть k дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

5. Найдите все натуральные числа m и n , для которых $|4m^2 - n^{n+1}| \leq 3$.

6. Виноторговец купил 50 бочек одинакового размера с винами 50 разных сортов. На каждой бочке выгравировано название сорта. Он продегустировал все вина и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта вин указаны правильно, но некоторые вина налиты в другие бочки. У торговца есть пустая бочка такого же размера, на которой ничего не написано. За одну операцию он может перелить все вино из какой-либо бочки в пустую. Всегда ли виноторговец сможет добиться того, чтобы в каждой бочке было вино того сорта, который на ней выгравирован, сделав не более 90 операций?

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2019} < \frac{a}{2018+a^3} + \frac{b}{2018+b^3} + \frac{c}{2018+c^3} < \frac{1}{2018}.$$

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена такая точка E , что $\angle ABE = 60^\circ$, а на луче BA отмечена такая точка F , что $BE = BF$. Отрезки EF и AD пересекаются в точке M . Докажите, что $\angle BME = 75^\circ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019**МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА**

1. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски 2×2019 в синий и красный цвета (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Когда все клетки закрашены первый подсчитывает количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, а второй подсчитывает количество пар соседних по стороне разноцветных клеток. Выигрывает тот из них, чье число больше. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

2. С тремя числами a, b, c на доске можно произвести операцию замены: стереть эти числа с доски, записав в любом порядке новые три числа $a+b, b+c, c+a$. Изначально на доске были числа 20, 1, 9, после чего сделали несколько операций замен. Могли ли на доске оказаться трехзначное число, пятизначное число и еще какое-то число?

3. С числом разрешается делать следующую операцию. Выбрать в его записи две подряд идущие цифры a и b , и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab . При этом если на первых слева или на последних справа местах в записи нового числа оказывается сколько-то цифр 0, то все они стираются. Например, из 251023 последовательно можно получить 25106, 106 и 1. Дано 100 чисел, не делящихся на 10. Докажите, что все эти 100 чисел можно получить из одного и того же изначального числа.

4. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Общее количество дорог равно $2(k-1)^2$. Докажите, что либо в стране есть город, из которого выходит хотя бы k дорог, либо есть k дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

5. Найдите все натуральные числа m и n , для которых $|4m^2 - n^{n+1}| \leq 3$.

6. Виноторговец купил 10 бочек одинакового размера с винами 10 разных сортов. На каждой бочке выгравировано название сорта. Он продегустировал все вина и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта вин указаны правильно, но некоторые вина налиты в другие бочки. У торговца есть пустая бочка такого же размера, на которой ничего не написано. За одну операцию он может перелить все вино из какой-либо бочки в пустую. Докажите, что виноторговец всегда сможет добиться того, чтобы в каждой бочке было вино того сорта, который на ней выгравирован, сделав не более 20 операций.

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2019} < \frac{a}{2018+a^3} + \frac{b}{2018+b^3} + \frac{c}{2018+c^3} < \frac{1}{2018}.$$

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена такая точка E , что $\angle ABE = 60^\circ$, а на луче BA отмечена такая точка F , что $BE = BF$. Отрезки EF и AD пересекаются в точке M . Докажите, что $\angle BME = 75^\circ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В первой коробке лежат красные шары, а во второй — синие. Число красных шаров составляет $15/19$ от числа синих шаров. Если удалить ровно $3/7$ всех красных шаров и ровно $2/5$ всех синих шаров, то в первой коробке останется менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров изначально лежит в каждой из коробок?
2. С натуральным числом разрешается проделывать следующую операцию: выбрать в его десятичной записи две подряд идущие цифры a и b , и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab . При этом если на первых слева местах в десятичной записи оказывается сколько-то нулей, то все они удаляются. Например, из 251023 последовательными операциями можно получить 25106, затем 106, 10, и, наконец, вовсе удалить число. Дано 100 чисел, состоящих из цифр 1, 3, 7, 9. Докажите, что существует число, из которого при помощи операций можно получить любое из этих 100 чисел.
3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.
4. Про натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}, b$ известно, что $a_1! + a_2! + \dots + a_{100}! = b!$. Какое наибольшее значение может принимать число b ? Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
5. Два игрока по очереди закрашивают по одной клетке доски 2×2019 в синий и красный цвета, пока все клетки не будут закрашены (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Затем подсчитывают количество пар соседних по стороне одноцветных клеток и соседних по стороне разноцветных клеток. Первый игрок выигрывает, если одноцветных пар больше, чем разноцветных, и проигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?
6. Назовем *интересными* 100-значные числа, в записи которых нет нулей, а каждая цифра встречается не более 20 раз. Докажите, что ровно треть из этих чисел делятся на 3.
7. Торговец купил 20 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может переливать лимонад из полной бочки в пустую. За какое наименьшее количество переливаний он заведомо сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?
8. По кругу расставлено 100 чисел, каждое из которых равно 2018, 2019 или 2020. При этом никакие два соседних числа не равны. Петя разбил эти числа на 50 пар соседних, числа в парах перемножил и полученные произведения сложил. Вася разбил их на 50 пар соседних другим способом, и тоже числа в парах перемножил и полученные произведения сложил. Докажите, что у Пети и Васи получились одинаковые результаты.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В первой коробке лежат красные шары, а во второй — синие. Число красных шаров составляет $15/19$ от числа синих шаров. Если удалить ровно $3/7$ всех красных шаров и ровно $2/5$ всех синих шаров, то в первой коробке останется менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров изначально лежит в каждой из коробок?
2. С числом разрешается делать следующую операцию. Выбрать в его записи две подряд идущие цифры a и b , и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab . При этом если на первых слева или на последних справа местах в записи нового числа оказывается сколько-то цифр 0, то все они стираются. Например, из 251023 последовательно можно получить 25106, 106 и 1. Дано 100 чисел, не делящихся на 10. Докажите, что все эти 100 чисел можно получить из одного и того же изначального числа.
3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.
4. Про натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}, b$ известно, что $a_1! + a_2! + \dots + a_{100}! = b!$. Какое наибольшее значение может принимать число b ? Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
5. Два игрока по очереди закрашивают по одной клетке доски 2×2019 в синий и красный цвета, пока все клетки не будут закрашены (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Затем подсчитывают количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, и соседних по стороне разноцветных клеток. Первый игрок выигрывает, если одноцветных пар больше, чем разноцветных, и проигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?
6. У некоторого натурального числа поменяли местами первую и последнюю цифры и прибавили к исходному числу. Какое наибольшее число могло получиться в сумме, если все цифры полученного числа различны?
7. Торговец купил 111 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может перелить лимонад из полной бочки в пустую. Всегда ли торговец за не более, чем 166 переливаний сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?
8. По кругу расставлено 100 чисел, каждое из которых равно 2018, 2019 или 2020. При этом никакие два соседних числа не равны. Петя разбил эти числа на 50 пар соседних, числа в парах перемножил и полученные произведения сложил. Вася разбил их на 50 пар соседних другим способом, и тоже числа в парах перемножил и полученные произведения сложил. Докажите, что у Пети и у Васи получились одинаковые результаты.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В первой коробке лежат красные шары, а во второй — синие. Число красных шаров составляет $15/19$ от числа синих шаров. Если удалить ровно $3/7$ всех красных шаров и ровно $2/5$ всех синих шаров, то в первой коробке останется менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров изначально лежит в каждой из коробок?
2. С числом разрешается делать следующую операцию. Выбрать в его записи две подряд идущие цифры a и b , и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab . При этом если на первых слева или на последних справа местах в записи нового числа оказывается сколько-то цифр 0, то все они стираются. Например, из 251023 последовательно можно получить 25106, 106 и 1. Дано 100 чисел, не делящихся на 10. Докажите, что все эти 100 чисел можно получить из одного и того же изначального числа.
3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.
4. Про натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}, b$ известно, что $a_1! + a_2! + \dots + a_{100}! = b!$. Какое наибольшее значение может принимать число b ? Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
5. Два игрока по очереди закрашивают по одной клетке доски 1×2019 в синий и красный цвета, пока все клетки не будут закрашены (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). В конце подсчитываются количества пар соседних по стороне одноцветных клеток и соседних по стороне разноцветных клеток. Если одноцветных пар больше, выигрывает первый, если меньше, то второй, а если поровну, то объявляется ничья. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу независимо от действий соперника? Если да, то кто?
6. У некоторого натурального числа поменяли местами первую и последнюю цифры и прибавили полученное число к исходному. Какая наибольшая сумма могла получиться, если все её цифры различны?
7. Торговец купил 111 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может перелить лимонад из полной бочки в пустую. Всегда ли торговец за не более, чем 166 переливаний сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?
8. Фигура *хромая ладья* бьет клетки на расстоянии 2, 3 или 4 по горизонтали или вертикали, причём ладья может бить сквозь другие ладьи. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга хромых ладей можно поставить на доску 600×600 ?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Сколько среди восьмизначных чисел, все цифры которых различны, таких, которые делятся на 3?
 2. Златан увидел на картинке футбольный мяч, сшитый из нескольких лоскутков — белых шестиугольников и красных пятиконечных звёзд. Каждая звезда граничит только с пятью шестиугольниками, а каждый шестиугольник — только с тремя звёздами. Сколько всего лоскутков ушло на изготовление мяча, если по картинке можно установить, что их не меньше 30, но меньше 40?
- 
3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.
 4. Два игрока по очереди закрашивают по одной клетке доски 1×2019 в синий и красный цвета, пока все клетки не будут закрашены (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). В конце подсчитываются количества пар соседних по стороне одноцветных клеток и соседних по стороне разноцветных клеток. Если одноцветных пар больше, выигрывает первый, если меньше, то второй, а если поровну, то объявляется ничья. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу независимо от действий соперника? Если да, то кто?
 5. Из четырёхзначного натурального числа получены другие четырёхзначные числа путём перестановки его цифр. Может ли одно из этих чисел равняться сумме каких-то двух других этих чисел?
 6. Торговец купил 11 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может перелить лимонад из полной бочки в пустую. Всегда ли торговец не более, чем за 16 переливаний сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?
 7. У некоторого натурального числа поменяли местами первую и последнюю цифры и прибавили полученное число к исходному. Какая наибольшая сумма могла получиться, если все её цифры различны?
 8. Фигура *хромая ладья* бьет клетки на расстоянии 2, 3 или 4 по горизонтали или вертикали, причём ладья может бить сквозь другие ладьи. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга хромых ладей можно поставить на доску 600×600 ?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C . Биссектриса угла C пересекает медиану AM в точке D . Докажите, что $\angle MDC \leq 45^\circ$.
2. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и угол A тупой. Перпендикуляр к AC , восставленный в точке C , пересекает AB в точке D . Докажите, что $\frac{1}{AB} - \frac{1}{BD} = \frac{2}{BC}$.
3. Треугольник ABC , в котором угол B в два раза больше угла C , назовём *хорошим*. Докажите, что плоскость можно без наложений покрыть хорошими треугольниками, никакие два из которых не подобны.
4. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и длины всех сторон — целые числа. Докажите, что эти длины сторон имеют вид $a = k(m^2 - n^2)$, $b = kmn$, $c = kn^2$, где k — натуральное число, а m и n — взаимно простые натуральные числа, удовлетворяющие условию $2n > m > n > 1$.
5. Пятиэлементные подмножества $A_1, A_2, \dots, A_k$ множества $\{1, 2, \dots, 23\}$ таковы, что пересечение любых двух из них содержит не более трёх элементов. Докажите, что $k \leq 2018$.
6. Докажите, что уравнение $\sqrt[3]{3 - x^3 - y^3} = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ не имеет решений в действительных числах.
7. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ ($m < n$). Среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ хотя бы $n - m + 1$ взаимно просты с b_1 . Докажите, что уравнение $x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_n^{a_n} = y_1^{b_1} + y_2^{b_2} + \dots + y_m^{b_m}$ имеет решение в натуральных числах.
8. Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур играют в следующую игру. На банковском счёте у Хиштаки Саританура один килограмм зелени. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это неотрицательное число (возможно, дробное), не превосходящее текущей суммы на счёту у Хиштаки Саританура. После этого Алюль или Булюль поют песню. Если песню поёт Алюль, то Хиштаки Саританур получает на свой счёт количество зелени, равное его ставке. Если же песню поёт Булюль, то со счёта Хиштаки Саританура списывается количество зелени, равное ставке. По условию игры Алюль и Булюль должны вместе спеть 35 песен, причем Алюль должен спеть больше песен, чем Булюль. Какую наибольшее количество зелени может гарантированно получить Хиштаки Саританур?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Треугольник ABC , в котором угол B в два раза больше угла C , назовём *хорошим*. Докажите, что плоскость можно без наложений покрыть хорошими треугольниками, никакие два из которых не равны.
2. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и угол A тупой. Перпендикуляр к AC , восставленный в точке C , пересекает AB в точке D . Докажите, что $\frac{1}{AB} - \frac{1}{BD} = \frac{2}{BC}$.
3. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C . Точка D — основание высоты, опущенной из A на BC , а точка E — середина BC . Докажите, что $AB = 2DE$.
4. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и длины всех сторон — целые числа. Докажите, что эти длины сторон имеют вид $a = k(m^2 - n^2)$, $b = kmn$, $c = kn^2$, где k — натуральное число, а m и n — взаимно простые натуральные числа, удовлетворяющие условию $2n > m > n > 1$.
5. Пятиэлементные подмножества $A_1, A_2, \dots, A_k$ множества $\{1, 2, \dots, 23\}$ таковы, что пересечение любых двух из них содержит не более трёх элементов. Докажите, что $k \leq 2018$.
6. В селении живут 100 человек в возрасте 1, 2, ..., 100 лет. Два человека могут образовать *счастливую пару*, если возраст каждого из них хотя бы на 7 лет больше половины возраста другого. Какое наибольшее количество (непересекающихся) счастливых пар можно составить из жителей селения?
7. Докажите, что уравнение $x^2 + y^4 + z^6 + t^8 + u^{10} = a^3 + b^6 + c^9$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
8. Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур играют в следующую игру. На банковском счёте у Хиштаки Саританура один килограмм зелени. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это неотрицательное число (возможно, дробное), не превосходящее текущей суммы на счёту у Хиштаки Саританура. После этого Алюль или Булюль поют песню. Если песню поёт Алюль, то Хиштаки Саританур получает на свой счёт количество зелени, равное его ставке. Если же песню поёт Булюль, то со счёта Хиштаки Саританура списывается количество зелени, равное ставке. По условию игры Алюль и Булюль должны вместе спеть 25 песен, причем Алюль должен спеть больше песен, чем Булюль. Сможет ли Хиштаки Саританур гарантированно удвоить свой запас зелени независимо от действий Алюля и Булюля?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Треугольник ABC , в котором угол B в два раза больше угла C , назовём *хорошим*. Докажите, что плоскость можно без наложений покрыть хорошими треугольниками, никакие два из которых не равны.
2. Треугольник ABC , в котором угол B в два раза больше угла C , назовём *хорошим*. Докажите, что треугольник со сторонами 4, 5 и 6 — хороший.
3. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C . Точка D — основание высоты, опущенной из A на BC , а точка E — середина BC . Докажите, что $AB = 2DE$.
4. Решите в целых числах уравнение $(x+y^2)(y+x^2) = (x+y)^2$.
5. Зрительный зал в театре представляет собой квадрат 29×29 (29 рядов по 29 кресел). К началу спектакля в зале были заняты все места. Во время антракта все зрители вышли из зала. После антракта они вернулись в зал. Вася вернулся в зал последним и обнаружил, что его место занято и каждый из остальных зрителей пересел на соседнее кресло (слева, справа, спереди или сзади). Каким могло быть место Васи в зрительном зале?
6. В селении живут 100 человек в возрасте 1, 2, ..., 100 лет. Два человека могут образовать *счастливую пару*, если возраст каждого из них хотя бы на 7 лет больше половины возраста другого. Какое наибольшее количество (непересекающихся) счастливых пар можно составить из жителей селения?
7. Докажите, что уравнение $x^2 + y^4 + z^6 + t^8 = a^3 + b^6$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
8. Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур играют в следующую игру. На банковском счёте у Хиштаки Саританура один килограмм зелени. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это неотрицательное число (возможно, дробное), не превосходящее текущей суммы на счёту у Хиштаки Саританура. После этого Алюль или Булюль поют песню. Если песню поёт Алюль, то Хиштаки Саританур получает на свой счёт количество зелени, равное его ставке. Если же песню поёт Булюль, то со счёта Хиштаки Саританура списывается количество зелени, равное ставке. По условию игры Алюль и Булюль должны вместе спеть три песни, причем Алюль должен спеть больше песен, чем Булюль. Сможет ли Хиштаки Саританур гарантированно удвоить свой запас зелени независимо от действий Алюля и Булюля?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На 2019 карточках написаны различные натуральные числа. Найдите наибольшее возможное количество таких пар карточек, что полусумма чисел на этих карточках также написана на одной из карточек.
2. Натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ таковы, что $a_1 a_2 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 100n$. При каком наибольшем n такое возможно?
3. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. На банковском счету у Буратино один золотой. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это неотрицательное число (возможно дробное), не превосходящее текущей суммы на счету у Буратино. После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас перечисляет на счет Буратино сумму, равную ставке. Если же песню поет Карабас, то Буратино переводит на счет Карабаса сумму, равную ставке. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть 35 песен, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?
4. Найдите все натуральные числа n , при которых уравнение $3a^2 - b^2 = 2018^n$ имеет решение в натуральных числах a и b .
5. Зрительный зал в театре представляет собой квадрат 29×29 (29 рядов по 29 кресел). К началу спектакля в зале были заняты все места. Во время антракта все зрители вышли из зала. После антракта они вернулись в зал. Вася вернулся в зал последним и обнаружил, что его место занято и каждый из остальных зрителей пересел на соседнее кресло (слева, справа, спереди или сзади). Каким могло быть место Васи в зрительном зале?
6. Натуральные делители натурального числа n упорядочили по возрастанию. Нашлись два соседних делителя a и b таких, что $a^2 + b^2 = 2n + 1$. Докажите, что число $4n + 1$ является квадратом натурального числа.
7. В группе КотоФото 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что число друзей Ани меньше, чем число друзей любого другого участника группы, а число друзей у Бори больше, чем число друзей любого другого участника группы. При этом сумма количеств их друзей равна k (если кто-то дружит с Аней и с Борей, то он считается дважды). По правилам группы фотографиями могут обмениваться только друзья. Вера и Гена состоят в этой группе. При каком наименьшем k заведомо верно, что Вера и Гена могут обмениваться друг с другом фотографиями котиков, возможно, через других участников группы?
8. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC . Найдите угол BAM , если известно, что $\angle B = 30^\circ$ и $\angle C = 105^\circ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На 2019 карточках написаны различные натуральные числа. Найдите наибольшее возможное количество таких пар карточек, что полусумма чисел на этих карточках также написана на одной из карточек.
2. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что $|x_i| \leq 1$ и $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$. При каком наименьшем n такое может быть? (Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — не обязательно целые.)
3. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. У Буратино есть 1000 золотых. Каждым ходом он выкладывает на стол несколько золотых (возможно ноль). После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас достает из сундука столько же золотых, сколько выложил Буратино и все эти деньги забирает Буратино. Если же песню поет Карабас, то Буратино отдает все выложенные деньги ему. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть пять песен, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Смогут ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?
4. Найдите все натуральные числа n , при которых уравнение $3a^2 - b^2 = 2018^n$ имеет решение в натуральных числах a и b .
5. Зрительный зал в театре представляет собой квадрат 29×29 (29 рядов по 29 кресел). К началу спектакля в зале были заняты все места. Во время антракта все зрители вышли из зала. После антракта они вернулись в зал. Вася вернулся в зал последним и обнаружил, что его место занято и каждый из остальных зрителей пересел на соседнее кресло (слева, справа, спереди или сзади). Каким могло быть место Васи в зрительном зале?
6. Натуральные делители натурального числа n упорядочили по возрастанию. Нашлись два соседних делителя a и b таких, что $a^2 + b^2 = 2n + 1$. Докажите, что число $4n + 1$ является квадратом натурального числа.
7. В группе КотоФото 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что число друзей Ани меньше, чем число друзей любого другого участника группы, а число друзей у Бори больше, чем число друзей любого другого участника группы. При этом сумма количеств их друзей равна k (если кто-то дружит с Аней и с Борей, то он считается дважды). По правилам группы фотографиями могут обмениваться только друзья. Вера и Гена состоят в этой группе. При каком наименьшем k заведомо верно, что Вера и Гена могут обменяться друг с другом фотографиями котиков, возможно, через других участников группы?
8. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC . Найдите угол BAM , если известно, что $\angle B = 30^\circ$ и $\angle C = 105^\circ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. По кругу расставлено 32 лампочки. Изначально они выключены. За ход можно переключить 5 подряд идущих лампочек. За какое наименьшее число ходов можно сделать все лампочки включенными?
2. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что $|x_i| \leq 1$ и $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$. При каком наименьшем n такое может быть? (Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — не обязательно целые.)
3. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. У Буратино есть 1000 золотых. Каждым ходом он выкладывает на стол несколько золотых (возможно ноль). После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас достает из сундука столько же золотых, сколько выложил Буратино и все эти деньги забирает Буратино. Если же песню поет Карабас, то Буратино отдает все выложенные деньги ему. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть три песни, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?
4. Найдите все натуральные числа n , при которых уравнение $3a^2 - b^2 = 122^n$ имеет решение в натуральных числах a и b .
5. Зрительный зал в театре представляет собой квадрат 29×29 (29 рядов по 29 кресел). К началу спектакля в зале были заняты все места. Во время антракта все зрители вышли из зала. После антракта они вернулись в зал. Вася вернулся в зал последним и обнаружил, что его место занято и каждый из остальных зрителей пересел на соседнее кресло (слева, справа, спереди или сзади). Каким могло быть место Васи в зрительном зале?
6. На 12 карточках написаны числа $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{12}$. Петя выбирает несколько карточек и складывает написанные на них числа. На какое наибольшее количество двоек может оканчиваться полученное им число?
7. В группе КотоФото 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что число друзей Ани меньше, чем число друзей любого другого участника группы, а число друзей у Бори больше, чем число друзей любого другого участника группы. При этом сумма количеств их друзей равна k (если кто-то дружит с Аней и с Борей, то он считается дважды). По правилам группы фотографиями могут обмениваться только друзья. Вера и Гена состоят в этой группе. При каком наименьшем k заведомо верно, что Вера и Гена могут обмениваться друг с другом фотографиями котиков, возможно, через других участников группы?
8. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и AD равны. Найдите угол BDA , если известно, что $\angle ABC = 40^\circ$, а отрезки AC и AD перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. В начале на счету у Буратино 1000 золотых. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это целое неотрицательное число золотых, не превосходящее текущей суммы на счету у Буратино. После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас перечисляет на счет Буратино сумму, равную ставке. Если же песню поет Карабас, то Буратино переводит на счет Карабаса сумму, равную ставке. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть 5 песен, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?
2. На доске написано 2019 различных натуральных чисел. Петя сосчитал количество пар написанных чисел, полусумма которых тоже написана на доске (пары, получающиеся перестановкой чисел, считаются одинаковыми). Какое наибольшее количество таких пар мог насчитать Петя?
3. Делители d и e натурального числа n таковы, что $d > e$ и любое число, большее e , но меньшее d , не является делителем n . Оказалось, что $d^2 + e^2 = 2n + 1$. Докажите, что число $4n + 1$ является квадратом натурального числа.
4. Можно ли отметить на окружности 100 синих точек, а внутри окружности 97 красных точек, не лежащих на отрезках с синими концами, так, чтобы внутри любого пятиугольника с вершинами в синих точках лежало ровно 3 красных точки?
5. Натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ таковы, что $a_1 a_2 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 50n$. Может ли n быть больше 2019?
6. В социальной сети 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что у Ани строго меньше друзей, чем у любого из остальных, а у Бори — строго больше друзей, чем у любого из остальных. При этом сумма количеств друзей Ани и Бори равна k . При каком наибольшем k могло случиться так, что Вера и Гена из той же сети не могут передать друг другу привет (возможно, через других участников сети)? Привет можно передавать только друзьям.
7. Среди всех натуральных чисел от 1 до 10^{100} рассмотрим только те, у которых сумма всех цифр больше произведения всех цифр. Каких среди этих чисел больше: четных или нечетных?
8. Во всех кроме одной клетках квадрата 29×29 стоит по фишке. Все фишки смогли одновременно переместиться в соседнюю по стороне клетку так, что в каждой клетке вновь оказалось не более одной фишки, а свободное изначально место оказалось занято. Сколько есть вариантов расположения клетки, на которой изначально не было фишки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. В начале на счету у Буратино 1000 золотых. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это целое неотрицательное число золотых, не превосходящее текущей суммы на счету у Буратино. После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас перечисляет на счет Буратино сумму, равную ставке. Если же песню поет Карабас, то Буратино переводит на счет Карабаса сумму, равную ставке. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть 5 песен, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?
2. На доске написано 2019 различных натуральных чисел. Петя сосчитал количество пар написанных чисел, полусумма которых тоже написана на доске (пары, получающиеся перестановкой чисел, считаются одинаковыми). Какое наибольшее количество таких пар мог насчитать Петя?
3. Ане и Боре задали решить пример на перемножение двух натуральных чисел. Но в учебнике последняя цифра одного из чисел плохо пропечаталась и ее сложно было разобрать. Аня подумала, что там должна быть цифра 8, и получила ответ, отличающийся от правильного на 1016. Боря подумал, что там должна быть цифра 3, и получил ответ, отличающийся от правильного на 381. Какая цифра на самом деле плохо пропечаталась?
4. Можно ли отметить на окружности 100 синих точек, а внутри окружности 97 красных точек, не лежащих на отрезках с синими концами, так, чтобы внутри любого пятиугольника с вершинами в синих точках лежало ровно 3 красных точки?
5. В ряд стоят числа 3, 6, 4, 20, 9, 12, 2, 8. За одну операцию можно выбрать несколько чисел, наибольший общий делитель которых равен их количеству, и переставить их между собой так, чтобы ни одно из них не осталось на прежнем месте (например, можно переставить числа 3, 6, 12 и получить 12, 3, 4, 20, 9, 6, 2, 8). Можно ли при помощи таких операций переставить числа в обратном порядке?
6. В социальной сети 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что у Ани строго меньше друзей, чем у любого из остальных, а у Бори — строго больше друзей, чем у любого из остальных. При этом сумма количеств друзей Ани и Бори равна k . При каком наибольшем k могло случиться так, что Вера и Гена из той же сети не могут передать друг другу привет (возможно, через других участников сети)? Привет можно передавать только друзьям.
7. Среди всех натуральных чисел от 1 до 10^{100} рассмотрим только те, у которых сумма всех цифр больше произведения всех цифр. Каких среди этих чисел больше: четных или нечетных?
8. Во всех кроме одной клетках квадрата 29×29 стоит по фишке. Все фишки смогли одновременно переместиться в соседнюю по стороне клетку так, что в каждой клетке вновь оказалось не более одной фишки, а свободное изначально место оказалось занято. Сколько есть вариантов расположения клетки, на которой изначально не было фишки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Имеются 5 камней. Какие бы два из них ни выбрать, они вместе весят либо 75, либо 84, либо 93 фунта (все эти значения встречаются). Сколько весит каждый камень?
2. На доске написано 2019 различных натуральных чисел. Петя сосчитал количество пар написанных чисел, полусумма которых тоже написана на доске (пары, получающиеся перестановкой чисел, считаются одинаковыми). Какое наибольшее количество таких пар мог насчитать Петя?
3. Ане и Боре задали решить пример на перемножение двух натуральных чисел. Но в учебнике последняя цифра одного из чисел плохо пропечаталась и ее сложно было разобрать. Аня подумала, что там должна быть цифра 8, и получила ответ, отличающийся от правильного на 1016. Боря подумал, что там должна быть цифра 3, и получил ответ, отличающийся от правильного на 381. Какая цифра на самом деле плохо пропечаталась?
4. Можно ли отметить на окружности 90 синих точек, а внутри окружности 87 красных точек, не лежащих на отрезках с синими концами, так, чтобы внутри любого пятиугольника с вершинами в синих точках лежало ровно 3 красных точки?
5. В ряд стоят числа 3, 6, 4, 20, 9, 12, 2, 8. За одну операцию можно выбрать несколько чисел, наибольший общий делитель которых равен их количеству, и переставить их между собой так, чтобы ни одно из них не осталось на прежнем месте (например, можно переставить числа 3, 6, 12 и получить 12, 3, 4, 20, 9, 6, 2, 8). Можно ли при помощи таких операций переставить числа в обратном порядке?
6. В социальной сети 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что у Ани строго меньше друзей, чем у любого из остальных, а у Бори — строго больше друзей, чем у любого из остальных. При этом сумма количеств друзей Ани и Бори равна k . При каком наибольшем k могло случиться так, что Вера и Гена из той же сети не могут передать друг другу привет (возможно, через других участников сети)? Привет можно передавать только друзьям.
7. Среди всех натуральных чисел от 1 до 10^{100} рассмотрим только те, у которых сумма всех цифр больше произведения всех цифр. Каких среди этих чисел больше: четных или нечетных?
8. Во всех кроме одной клетках квадрата 29×29 стоит по фишке. Все фишки смогли одновременно переместиться в соседнюю по стороне клетку так, что в каждой клетке вновь оказалось не более одной фишки, а свободное изначально место оказалось занято. Сколько есть вариантов расположения клетки, на которой изначально не было фишки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Имеются 5 камней. Какие бы два из них ни выбрать, они вместе весят либо 75, либо 84, либо 93 фунта (все эти значения встречаются). Сколько весит каждый камень?
2. Пятеро мальчиков провели турнир по настольному теннису, играя пара против пары. При этом каждая пара, какую только можно составить из них, против каждой из остальных возможных пар сыграла ровно один матч. Сколько всего матчей было сыграно?
3. Ане и Боре задали решить пример на перемножение двух натуральных чисел. Но в учебнике последняя цифра одного из чисел плохо пропечаталась и ее сложно было разобрать. Аня подумала, что там должна быть цифра 8, и получила ответ, отличающийся от правильного на 1016. Боря подумал, что там должна быть цифра 3, и получил ответ, отличающийся от правильного на 381. Как цифра на самом деле плохо пропечаталась?
4. Таблица 3×3 заполнена числами так, как показано на рисунке. За одну операцию можно взять любые n чисел, НОД которых равен n , и переставить их между собой так, чтобы ни одно из них не осталось на прежнем месте. Можно ли при помощи таких операций получить расстановку, симметричную исходной относительно главной диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний?

1	3	4
6	8	9
10	12	20
5. На окружности отмечено 90 синих точек. Внутри окружности отмечено 86 красных точек, ни одна из которых не лежит на отрезке с синими концами. Докажите, что можно выбрать 5 синих точек таким образом, чтобы внутри пятиугольника с вершинами в этих точках было не более двух красных точек.
6. В социальной сети 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что у Ани строго меньше друзей, чем у любого из остальных, а у Бори — строго больше друзей, чем у любого из остальных. При этом сумма количеств их друзей равна 2000. Может ли случиться так, что Вера и Гена из той же сети не могут передать друг другу привет (возможно, через других участников сети)? Привет можно передавать только друзьям.
7. По кругу стоят 50 хамелеонов трёх цветов: серого, бурого и малинового (хотя бы два цвета присутствуют). Каждую минуту они все одновременно перекрашиваются по следующему правилу: если хамелеон стоял между хамелеонами одного цвета он становится того же цвета, а если между разными, то перекрашивается в третий цвет. Докажите, что каждую минуту хотя бы один хамелеон будет менять свой цвет.
8. Во всех кроме одной клетках квадрата 29×29 стоит по фишке. Все фишки смогли одновременно переместиться в соседнюю по стороне клетку так, что в каждой клетке вновь оказалось не более одной фишки, а свободное изначально место оказалось занято. Сколько есть вариантов расположения клетки, на которой изначально не было фишки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дан остроугольный треугольник ABC . Прямую AB повернули вокруг точки A на 60° по часовой стрелке и получили прямую a . Прямую BC повернули вокруг точки B на 60° по часовой стрелке и получили прямую b . Наконец, прямую CA повернули вокруг точки C на 60° по часовой стрелке и получили прямую c . Докажите, что периметр треугольника, образованного прямыми a , b и c , не меньше периметра треугольника ABC .
2. Гриша рисует на клетчатой бумаге многоугольник так, что все его стороны идут вдоль линий сетки. При каких натуральных n может оказаться, что каждая линия сетки или содержит ровно n сторон многоугольника, или совсем не содержит сторон?
3. Дано вещественное число q , натуральные числа r , m , n , k и целое число u . Множество A состоит из чисел ur , $(u+1)r$, ..., $(u+m)r$, а множество B — из чисел k , $k+1$, ..., $k+n$. Назовём число из множества B *хорошим*, если разность между ним и некоторым элементом множества A равна sq , где число s — целое. Докажите, что если $mn < q$ и хорошие числа существуют, то они образуют арифметическую прогрессию.
4. По кругу около вас сидят 100 островитян, пронумерованных числами $1, 2, \dots, 100$, каждый из которых — рыцарь или лжец (но кто есть кто — известно только им). Через час молчания они по очереди стали называть числа по следующему правилу: каждый ищет глазами следующего после него по часовой стрелке лжеца L и, если он сам рыцарь, то говорит вслух номер L , а если он сам лжец, то называет любое натуральное число, не равное номеру L . Вы слышите, кто какие числа произносит, и видите, какие номера имеют сидящие за столом. Докажите, что если известно, что лжецов более половины, то можно однозначно определить, кто из островитян рыцарь, а кто — лжец.
5. Дан ориентированный граф. Ёкодзуны Таканохана и Мусасимару положили по камню в вершины A и B и ходят по очереди. Своим ходом ёкодзуна может перенести свой камень по стрелке или не делать ничего. При этом **не** запрещено ставить камень в вершину, где стоит камень соперника. После того, как камень перенесли по стрелке, стрелка разворачивается. В исходном графе Таканохана может переместить свой камень в B . Докажите, что он гарантированно сможет это сделать и в случае, когда Мусасимару пытается ему помешать (вне зависимости от того, кто ходит первым).
6. Неубывающая последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$ такова, что $x_1 = 1$, и среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$ ровно 25 различных. Докажите, что $x_3(x_3 - x_1) + x_4(x_4 - x_2) + \dots + x_{2019}(x_{2019} - x_{2017}) \geq 621$.
7. Решите в целых числах уравнение $(x+x^2)(y+y^2) = (x+y)^2$.
8. В трапеции $ABCD$ диагональ BD равна основанию AD , а диагональ AC — боковой стороне CD . Отрезки AC и BD пересекаются в точке E . Точка F на отрезке AD выбрана так, что $EF \parallel CD$. Докажите, что $BE = DF$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дан остроугольный треугольник ABC . Прямую AB повернули вокруг точки A на 60° по часовой стрелке и получили прямую a . Прямую BC повернули вокруг точки B на 60° по часовой стрелке и получили прямую b . Наконец, прямую CA повернули вокруг точки C на 60° по часовой стрелке и получили прямую c . Докажите, что периметр треугольника, образованного прямыми a , b и c , не меньше периметра треугольника ABC .
2. Гриша рисует на клетчатой бумаге многоугольник так, что все его стороны идут вдоль линий сетки. При каких натуральных n может оказаться, что каждая линия сетки или содержит ровно n сторон многоугольника, или совсем не содержит сторон?
3. Найдите все натуральные x , не являющиеся точными квадратами, такие, что x^2 делится на $[\sqrt{x}]^3$. Напомним, что $[a]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее a .
4. По кругу около вас сидят 100 островитян, пронумерованных числами $1, 2, \dots, 100$, каждый из которых — рыцарь или лжец (но кто есть кто — известно только им). Через час молчания они по очереди стали называть числа по следующему правилу: каждый ищет глазами следующего после него по часовой стрелке лжеца L и, если он сам рыцарь, то говорит вслух номер L , а если он сам лжец, то называет любое натуральное число, не равное номеру L . Вы слышите, кто какие числа произносит, и видите, какие номера имеют сидящие за столом. Докажите, что если известно, что лжецов более половины, то можно однозначно определить, кто из островитян рыцарь, а кто — лжец.
5. В королевстве Нечетномонголия n городов и полностью отсутствуют дороги. Король решил соединить дорогами хотя бы какие-нибудь города, однако его ограничивает древнее предание, согласно которому юная дева, выехавшая из родного города и вернувшаяся в него, проехав по одному разу через нечётное число других городов, погубит монархию. Какое наибольшее количество дорог сможет провести король так, чтобы не дать шанса юной деवे?
6. Неубывающая последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$ такова, что $x_1 = 1$, и среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$ ровно 25 различных. Докажите, что $x_3(x_3 - x_1) + x_4(x_4 - x_2) + \dots + x_{2019}(x_{2019} - x_{2017}) \geq 621$.
7. Решите в целых числах уравнение $(x+x^2)(y+y^2) = (x+y)^2$.
8. В трапеции $ABCD$ диагональ BD равна основанию AD , а диагональ AC — боковой стороне CD . Отрезки AC и BD пересекаются в точке E . Точка F на отрезке AD выбрана так, что $EF \parallel CD$. Докажите, что $BE = DF$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан остроугольный треугольник ABC . Прямую AB повернули вокруг точки A на 60° по часовой стрелке и получили прямую a . Прямую BC повернули вокруг точки B на 60° по часовой стрелке и получили прямую b . Наконец, прямую CA повернули вокруг точки C на 60° по часовой стрелке и получили прямую c . Докажите, что периметр треугольника, образованного прямыми a , b и c , не меньше периметра треугольника ABC .

2. Докажите, что при некотором $k > 2$ можно нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник так, что все его стороны идут по линиям сетки, и каждая линия сетки или содержит ровно k сторон многоугольника, или совсем не содержит сторон.

3. Найдите все натуральные x , не являющиеся точными квадратами, такие, что x^2 делится на $[\sqrt{x}]^3$. Напомним, что $[a]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее a .

4. По кругу около вас сидят 100 островитян, каждый из которых рыцарь или лжец (но кто есть кто — известно только им). Они пронумерованы числами $1, 2, \dots, 100$. Через час молчания они по очереди стали называть числа последующему правилу: каждый ищет глазами следующего после него по часовой стрелке лжеца L и, если он сам рыцарь, то говорит вслух номер L , а если он сам лжец, то называет любое натуральное число, не равное номеру L . Вы слышите, кто какие числа произносит, и видите, какие номера имеют сидящие за столом. Может ли оказаться, что ни про одного из островитян нельзя определить, рыцарь он или лжец?

5. Клетки полосы $1 \times n$, $n \geq 6$, покрашены в жёлтый и голубой цвета. В каждой из этих клеток написано число по таким правилам:

(i) в каждой жёлтой клетке стоит число $2+3b$, где b — количество голубых клеток, соседних с этой;

(ii) в каждой голубой клетке стоит 0.

Какое наибольшее значение может иметь сумма чисел во всех клетках?

6. Натуральные числа a , b и c таковы, что числа 2^a , 2^b и 2^c являются длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что этот треугольник остроугольный.

7. Решите в целых числах уравнение $(x+x^2)(y+y^2) = (x+y)^2$.

8. В трапеции $ABCD$ диагональ BD равна основанию AD , а диагональ AC — боковой стороне CD . Отрезки AC и BD пересекаются в точке E . Точка F на отрезке AD выбрана так, что $EF \parallel CD$. Докажите, что $BE = DF$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Для каждого натурального числа n к произведению всех цифр n прибавим максимальный простой делитель n . Полученное число будем называть *правильным*. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не являющихся правильными.
2. Дано натуральное число $n \geq 3$ и n -угольник, одна из вершин которого отмечена. Вася стоит спиной к n -угольнику и его не видит, а Петя видит. В начале игры Петя помещает в одну из вершин n -угольника фишку. Далее игроки делают ходы по очереди. Каждым ходом Вася называет натуральное число k (на разных ходах оно может быть разным), после чего Петя перемещает фишку на k вершин либо по часовой стрелке, либо против, на своё усмотрение. В тот момент, когда фишка попадает в отмеченную вершину, Вася выигрывает. При каких n Вася сможет выиграть?
3. На доске выписан ряд чисел: 1, 2, ..., 2018, 2019. За один шаг разрешается выбрать три написанные подряд числа a , b и c , из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?
4. Каждая клетка доски 150×150 покрашена в какой-то цвет, причём выполняется следующее свойство: в каждом столбце и каждой строке этой таблицы есть пара разноцветных клеток. Докажите, что можно так вычеркнуть 75 строк и 75 столбцов, чтобы на оставшейся доске это свойство сохранилось.
5. В группе из 100 школьников у каждого более 30 знакомых, но при этом никакие трое не имеют поровну знакомых. Докажите, что найдутся четверо школьников из этой группы, любые двое из которых знакомы.
6. Положительные числа x , y и z таковы, что $\frac{x^2 + xy}{y} = \frac{y^2 + yz}{z} = \frac{z^2 + zx}{x}$. Докажите, что $x = y = z$.
7. Натуральные числа m и n удовлетворяют соотношению $7m^2 + 7m + 2 = n^2$. Докажите, что число $n+1$ является суммой двух последовательных точных квадратов.
8. В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 100° . На продолжении биссектрисы BD угла ABC за сторону AC выбрали такую точку E , что $BE = BC$, а на основании BC выбрали такую точку F , что $AB = BF$. Докажите, что прямые AC и EF перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Для каждого натурального числа n к произведению всех цифр n прибавим максимальный простой делитель n . Полученное число будем называть *правильным*. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не являющихся правильными.
2. Дано натуральное число $n \geq 3$ и n -угольник, одна из вершин которого отмечена. Вася и Петя видят n -угольник. В начале игры Петя помещает в одну из его вершин фишку. Далее игроки делают ходы по очереди. Вася каждым ходом называет натуральное число k (на разных ходах оно может быть разным), после чего Петя перемещает фишку на k вершин либо по часовой стрелке, либо против, на своё усмотрение. В тот момент, когда фишка попадает в отмеченную вершину, Вася выигрывает. При каких n Вася сможет выиграть?
3. На доске выписан ряд чисел: 1, 2, ..., 2018, 2019. За один шаг разрешается выбрать три написанные подряд числа a , b и c , из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?
4. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в какой-то цвет, причём выполняется следующее свойство: в каждом столбце и каждой строке этой таблицы есть пара разноцветных клеток. Докажите, что можно так вычеркнуть 50 строк и 50 столбцов, чтобы на оставшейся доске это свойство сохранилось.
5. В группе из 100 школьников у каждого более 30 знакомых, но при этом никакие трое не имеют поровну знакомых. Докажите, что найдутся четверо школьников из этой группы, любые двое из которых знакомы.
6. Положительные числа x , y и z таковы, что $\frac{x^2 + xy}{y} = \frac{y^2 + yz}{z} = \frac{z^2 + zx}{x}$. Докажите, что $x = y = z$.
7. Найдите все такие попарно различные натуральные числа a , b и c , что $\text{НОК}(a, b, c) = a + b + c$.
8. В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 100° . На продолжении биссектрисы BD угла ABC за сторону AC выбрали такую точку E , что $BE = BC$, а на основании BC выбрали такую точку F , что $AB = BF$. Докажите, что прямые AC и EF перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. К простому числу прибавим произведение его цифр. Полученное число будем называть *правильным*. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не являющихся правильными.
2. Вася и Петя видят 100-угольник, одна из вершин которого отмечена. В начале игры Петя помещает в одну из его вершин фишку. Далее игроки делают ходы по очереди. Вася каждым ходом называет натуральное число k (на разных ходах оно может быть разным), после чего Петя перемещает фишку на k вершин либо по часовой стрелке, либо против, на своё усмотрение. В тот момент, когда фишка попадает в отмеченную вершину, Вася выигрывает. Сможет ли Вася выиграть?
3. На доске выписан ряд чисел: 1, 2, ..., 2018, 2019. За один шаг разрешается выбрать три написанные подряд числа a , b и c , из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?
4. Каждая клетка доски 100×50 (100 столбцов, 50 строк) покрашена в какой-то цвет, причём выполняется следующее свойство: в каждом столбце и каждой строке этой таблицы есть пара разноцветных клеток. Докажите, что можно так вычеркнуть 50 столбцов, чтобы на оставшейся доске это свойство сохранилось.
5. В группе из 100 школьников у каждого более 35 знакомых, но при этом никакие трое не имеют поровну знакомых. Докажите, что найдутся четверо школьников из этой группы, любые двое из которых знакомы.
6. Петя пишет последовательность: $a_1 = 2019$, $a_2 = 100$, $a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{2}{a_n}$ при $n \geq 2$. Докажите, что в этой последовательности встретится число 0 (после чего Петя прекратит ее писать).
7. Найдите все такие попарно различные натуральные числа a , b и c , что $\text{НОК}(a, b, c) = a + b + c$.
8. Натуральные числа a , b и c таковы, что числа 2^a , 2^b и 2^c являются длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что этот треугольник остроугольный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Каждая клетка доски 16×16 раскрашена в какой-то цвет, причём раскраска обладает таким свойством: в каждом столбце и в каждой строке этой таблицы есть пара клеток разного цвета. Докажите, что можно так вычеркнуть 8 строк и 8 столбцов, чтобы на оставшейся доске это свойство сохранилось.
2. Имеются две кучи, в которых суммарно $2019 \cdot 2^{100}$ камней. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из игроков своим ходом может взять любую кучу, в которой чётное число камней, и половину камней из неё переложить в другую кучу. Тот, кто не может сделать ход — проигрывает. Верно ли, что для любой начальной позиции кто-то из игроков заведомо может выиграть независимо от игры соперника?
3. Докажите, что существует такой клетчатый многоугольник, что на каждой прямой, содержащей хотя бы одну его сторону, лежит ровно 42 его стороны.
4. По кругу сидят 60 островитян, каждый из которых рыцарь или лжец (но кто есть кто — известно только им), причём известно, что лжецов больше половины и они всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Островитяне пронумерованы числами 1, 2, ..., 60. Каждый островитянин ответил на вопрос: «Какой номер у ближайшего к тебе по часовой стрелке лжеца?» Как после этого определить всех лжецов?
5. По контуру квадрата, обходя его по часовой стрелке, ползут три муравья, скорости которых постоянны и различны. Найдите скорость самого медленного из муравьёв, если скорости других равны 15 мм/с и 45 мм/с, а все обгоны происходят только в вершинах квадрата.
6. В группе из 100 школьников у каждого более 30 знакомых, но при этом никакие трое не имеют поровну знакомых. Докажите, что найдутся четверо школьников из этой группы, любые двое из которых знакомы.
7. Для каждого натурального числа n к произведению всех цифр n прибавим максимальный простой делитель n . Полученное число будем называть *правильным*. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не являющихся правильными.
8. На доске выписан ряд чисел: 1, 2, ..., 2018, 2019. За один шаг разрешается выбрать три написанные подряд числа a , b и c , из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Вомбат полностью заполнил прямоугольную коробку кирпичами размером $5 \times 10 \times 20$ сантиметров. Докажите, что он мог заполнить эту коробку теми же кирпичами таким образом, чтобы все рёбра одинаковой длины были параллельны.
2. Имеются две кучи, в которых суммарно $2019 \cdot 2^{100}$ камней. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из игроков своим ходом может взять любую кучу, в которой чётное число камней, и половину камней из неё переложить в другую кучу. Тот, кто не может сделать ход — проигрывает. Верно ли, что для любой начальной позиции кто-то из игроков заведомо может выиграть независимо от игры соперника?
3. Докажите, что существует такой клетчатый многоугольник, что на каждой прямой, содержащей хотя бы одну его сторону, лежит ровно две его стороны.
4. По кругу сидят 60 островитян, каждый из которых рыцарь или лжец (но кто есть кто — известно только им), причём известно, что лжецов больше половины и они всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Островитяне пронумерованы числами $1, 2, \dots, 60$. Каждый островитянин ответил на вопрос: «Какой номер у ближайшего к тебе по часовой стрелке лжеца?» Как после этого определить всех лжецов?
5. По контуру квадрата, обходя его по часовой стрелке, ползут три муравья, скорости которых постоянны и различны. Найдите скорость самого медленного из муравьёв, если скорости других равны 15 мм/с и 45 мм/с , а все обгоны происходят только в вершинах квадрата.
6. В районе несколько сёл и три деревни. Из каждого села выходят 3 дороги, а из деревень — по одной. Каждая дорога соединяет два населённых пункта и обслуживается одной из трёх бригад. Дороги, выходящие из одного села, обслуживаются разными бригадами. Докажите, что дороги, выходящие из деревень, тоже обслуживаются разными бригадами.
7. Для каждого натурального числа n к произведению всех цифр n прибавим максимальный простой делитель n . Полученное число будем называть *правильным*. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не являющихся правильными.
8. На доске выписан ряд чисел: $1, 2, \dots, 2018, 2019$. За один шаг разрешается выбрать три написанные подряд числа a, b и c , из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1, c-1, a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Вомбат полностью заполнил кубическую коробку кирпичами размером $5 \times 10 \times 20$ сантиметров. Докажите, что он мог заполнить эту коробку теми же кирпичами таким образом, чтобы все рёбра одинаковой длины были параллельны.
2. Имеются две кучи, в которых суммарно 2^{100} камней. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из игроков своим ходом может взять любую кучу, в которой чётное число камней, и половину камней из неё переложить в другую кучу. Тот, кто не может сделать ход — проигрывает. Верно ли, что для любой начальной позиции кто-то из игроков заведомо может выиграть независимо от игры соперника?
3. Докажите, что существует такой клетчатый многоугольник, что на каждой прямой, содержащей хотя бы одну его сторону, лежит ровно две его стороны.
4. По кругу сидят 60 островитян, каждый из которых рыцарь или лжец (но кто есть кто — известно только им), причём известно, что лжецов больше половины и они всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Островитяне пронумерованы числами $1, 2, \dots, 60$. Каждый островитянин ответил на вопрос: «Какой номер у ближайшего к тебе по часовой стрелке лжеца?» Как после этого определить всех лжецов?
5. По контуру квадрата, обходя его по часовой стрелке, ползут три муравья, скорости которых постоянны и различны. Найдите скорость самого медленного из муравьёв, если скорости других равны 15 мм/с и 45 мм/с , а все обгоны происходят только в вершинах квадрата.
6. В районе несколько сёл и три деревни. Из каждого села выходят 3 дороги, а из деревень — по одной. Каждая дорога соединяет два населённых пункта и обслуживается одной из трёх бригад. Дороги, выходящие из одного села, обслуживаются разными бригадами. Докажите, что дороги, выходящие из деревень, тоже обслуживаются разными бригадами.
7. На доске выписано несколько различных восьмизначных чисел, запись которых состоит только из двоек и пятёрок. Докажите, что все эти числа имеют различные остатки от деления на 256.
8. На доске выписан ряд чисел: $1, 2, \dots, 2018, 2019$. За один шаг разрешается выбрать три написанные подряд числа a, b и c , из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1, c-1, a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Каменщик полностью заполнил прямоугольную коробку кирпичами размером $5 \times 10 \times 20$ сантиметров. Докажите, что он мог заполнить эту коробку теми же кирпичами таким образом, чтобы все рёбра одинаковой длины были параллельны.
2. Имеются две кучи, в одной из которых $2019 \cdot 2^{100}$ кирпичей, а другая — пустая. Бригада каменщиков в течение рабочего дня перекладывает ровно половину одной из непустых куч в другую кучу. Какое наибольшее число рабочих дней бригада может этим заниматься?
3. Докажите, что существует такой клетчатый многоугольник, что на каждой прямой, содержащей хотя бы одну его сторону, лежит ровно две его стороны.
4. Рассмотрим все числа, записываемые только единицами, тройками и пятёрками, и упорядочим их в порядке возрастания: 1, 3, 5, 11, 13, ... Какое число окажется на 2019-м месте?
5. Старуха Шапокляк хочет украсть из полного комплекта домино две костяшки, но так, чтобы оставшиеся костяшки можно было по правилам выложить по кругу. Сколькими способами она может осуществить свой план?
6. В районе несколько сёл и три деревни. Из каждого села выходят 3 дороги, а из деревень — по одной. Каждая дорога соединяет два населённых пункта и обслуживается одной из трёх бригад. Дороги, выходящие из одного села, обслуживаются разными бригадами. Докажите, что дороги, выходящие из деревень, тоже обслуживаются разными бригадами.
7. На доске выписано несколько различных восьмизначных чисел, запись которых состоит только из двоек и троек. Докажите, что все эти числа имеют различные остатки от деления на 256.
8. По контуру квадрата, обходя его по часовой стрелке, ползут три муравья, скорости которых постоянны и различны. Найдите скорость самого медленного из муравьёв, если скорости других равны 15 мм/с и 45 мм/с, а все обгоны происходят только в вершинах квадрата.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC угол C в два раза больше угла B . Внутри треугольника нашлась такая точка D , что $AD = AC$ и $DB = DC$. Докажите, что $\angle BAC = 3\angle BAD$.
2. Аня и Боря играют в игру. В начале Аня должна выбрать число x , а затем Боря (зная, какое число выбрала Аня) должен выбрать число y . Аня хочет, чтобы выражение $(2x-y)^2 - 2y^2 - 3y$ было как можно меньше, а Боря — как можно больше. Какие числа напишут Аня и Боря, если оба будут играть оптимально?
3. После неудачного выступления в 2017 году у сборной Фаталии на международной олимпиаде сменился руководитель. В первую очередь он решил отказаться от измерения творческого потенциала и установил новый способ отбора 6 членов команды из 13 кандидатов. Кандидаты пишут 6 отборочных олимпиад, на каждой из которых все набирают разное количество баллов. Далее руководитель команды выбирает порядок, в котором он будет учитывать результаты отборочных олимпиад, и для каждой олимпиады включает в сборную участника, выступившего на этой олимпиаде лучше остальных кандидатов, ещё не вошедших в сборную. Могут ли результаты кандидатов быть таковы, что каждый из них может стать членом команды?
4. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что число $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$ является степенью числа 1692 с целым неотрицательным показателем.
5. Последовательность $\{a_n\}$ определена условиями $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ и $a_n = a_{n-1}^2 + (a_0 a_1 \dots a_{n-2})^2$ при $n \geq 2$. Простое число p — делитель числа a_k . Докажите, что $p > 4(k-1)$.
6. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = BD$. Точка Q — середина отрезка CP . Докажите, что $\angle BQD = 90^\circ$.
7. Некоторые города Аркадии соединены дорогами (между любыми двумя городами не более одной дороги). Из каждого города выходят хотя бы две дороги. Докажите, что в Аркадии есть такой город, что, выехав из него по любой дороге, можно потом вернуться в него, не проезжая ни по какой дороге более одного раза.
8. Все клетки доски $(2n+1) \times (2n+1)$ раскрашены в красный и синий цвета: клетки нижней горизонтали в синий, а остальные — в красный. Разрешается выбрать любую клетку и изменить цвет этой клетки, а также цвета всех клеток, находящихся с ней в одной строке или в одном столбце. Какое наименьшее количество синих клеток может оказаться в таблице в результате нескольких таких операций?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Четыре брата делят дачный участок в форме параллелограмма $ABCD$. Они отметили на участке точки E и F и заказали строителям построить заборы, идущие по (непересекающимся) отрезкам AE , BE , CF , DF и EF , которые разделили бы параллелограмм на четыре участка одинаковой площади. Эти строительные работы, однако, требовали обязательной экспертизы. Эксперты из Заборостроительного института разрешили строить заборы только по отрезкам AF , BF , CE , DE и EF , которые, к счастью, тоже оказались непересекающимися. Докажите, что параллелограмм все равно разбился на четыре участка одинаковой площади.

2. Аня и Боря играют в игру. В начале Аня должна выбрать число x , а затем Боря (зная, какое число выбрала Аня) должен выбрать число y . Аня хочет, чтобы выражение $(2x-y)^2 - 2y^2 - 3y$ было как можно меньше, а Боря — как можно больше. Какие числа напишут Аня и Боря, если оба будут играть оптимально?

3. После неудачного выступления в 2017 году у сборной Фаталии на международной олимпиаде сменился руководитель. В первую очередь он решил отказаться от измерения творческого потенциала и установил новый способ отбора 6 членов команды из 13 кандидатов. Кандидаты пишут 6 отборочных олимпиад, на каждой из которых все набирают разное количество баллов. Далее руководитель команды выбирает порядок, в котором он будет учитывать результаты отборочных олимпиад, и для каждой олимпиады включает в сборную участника, выступившего на этой олимпиаде лучше остальных кандидатов, ещё не вошедших в сборную. Могут ли результаты кандидатов быть таковы, что каждый из них может стать членом команды?

4. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что число $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$ является степенью числа 1692 с целым неотрицательным показателем.

5. Существует ли натуральное число n , которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a , b и c — три различных натуральных делителя числа n ?

6. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = BD$. Точка Q — середина отрезка CP . Докажите, что $\angle BQD = 90^\circ$.

7. Некоторые города Аркадии соединены дорогами (между каждыми двумя городами не более одной дороги). Из каждого города выходят хотя бы две дороги. Докажите, что в Аркадии есть такой город, что, выехав из него по любой дороге, можно потом вернуться в него, не проезжая ни по какой дороге более одного раза.

8. Все клетки доски $(2n+1) \times (2n+1)$ раскрашены в красный и синий цвета: клетки нижней горизонтали в синий, а остальные — в красный. Разрешается выбрать любую клетку и изменить цвет этой клетки, а также цвета всех клеток, находящихся с ней в одной строке или в одном столбце. Какое наименьшее количество синих клеток может оказаться в таблице в результате нескольких таких операций?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Четыре брата делят дачный участок в форме параллелограмма $ABCD$. Они отметили на участке точки E и F и заказали строителям построить заборы, идущие по (непересекающимся) отрезкам AE , BE , CF , DF и EF , которые разделили бы параллелограмм на четыре участка одинаковой площади. Эти строительные работы, однако, требовали обязательной экспертизы. Эксперты из Заборостроительного института разрешили строить заборы только по отрезкам AF , BF , CE , DE и EF , которые, к счастью, тоже оказались непересекающимися. Докажите, что параллелограмм все равно разбился на четыре участка одинаковой площади.

2. Аня и Боря играют в игру. В начале Аня должна выбрать число x , а затем Боря (зная, какое число выбрала Аня) должен выбрать число y . Аня хочет, чтобы выражение $(2x-y)^2 - 2y^2$ было как можно меньше, а Боря — как можно больше. Какие числа напишут Аня и Боря, если оба будут играть оптимально?

3. После неудачного выступления в 2017 году у сборной Фаталии на международной олимпиаде сменился руководитель. В первую очередь он решил отказаться от измерения творческого потенциала и установил новый способ отбора 6 членов команды из 13 кандидатов. Кандидаты пишут 6 отборочных олимпиад, на каждой из которых все набирают разное количество баллов. Далее руководитель команды выбирает порядок, в котором он будет учитывать результаты отборочных олимпиад, и для каждой олимпиады включает в сборную участника, выступившего на этой олимпиаде лучше остальных кандидатов, ещё не вошедших в сборную. Могут ли результаты кандидатов быть таковы, что каждый из них может стать членом команды?

4. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что число $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$ является степенью числа 1692 с целым неотрицательным показателем.

5. Натуральные числа a и b удовлетворяют условиям $(a, b) = 10$ и $(a, b+2) = 12$. Найдите сумму $(a, 2b) + (a, 3b)$. (Через (x, y) обозначается наибольший общий делитель чисел x и y .)

6. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = BD$. Точка Q — середина отрезка CP . Докажите, что $\angle BQD = 90^\circ$.

7. На доске написаны числа от 1 до 64. Двое по очереди зачёркивают по одному числу с доски. Тот, после чьего хода найдутся два зачёркнутых числа, в сумме дающие степень двойки, проиграл. Кто выигрывает при правильной игре обоих?

8. Все клетки доски 10×11 (10 строк, 11 столбцов) раскрашены в красный и синий цвета: клетки нижней горизонтали в синий, а остальные — в красный. Разрешается выбрать любую клетку и изменить цвет этой клетки, а также цвета всех клеток, находящихся с ней в одной строке или в одном столбце. Можно ли такими операциями сделать все клетки красными?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА; ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. На окружности отмечены вершины правильного 2000-угольника и центр окружности. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой отмеченной точки в любую другую. Для каждого натурального $n \geq 3$ определите, кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник.

2. Существует ли натуральное число n , которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a , b и c — три различных натуральных делителя числа n ?

3. Найдите все простые числа p , для которых существуют такие натуральные n и m , что $\frac{p^2 + 1}{p + 1} = \frac{m^2}{n^2}$.

4. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Петя утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Петя быть прав?

5. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

6. Каждая клетка таблицы 2019×2019 покрашена в красный или синий цвет. За один ход можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 4037 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, такими операциями можно добиться того, что красных клеток станет не больше 2018.

7. Для положительных чисел x , y , z докажите неравенство

$$x^2z(4x-3y)+y^2x(4y-3z)+z^2y(4z-3x) > 0.$$

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH , медиана BM , и биссектриса CD . Отрезки BM и CD пересекаются в точке K . Оказалось, что $KB = KC$. Докажите, что $KM = KH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019**МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-10 МЕСТА**

1. На окружности отмечены вершины правильного 2000-угольника и центр окружности. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой отмеченной точки в любую другую. Кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник.

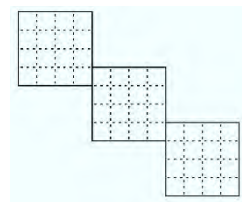
2. Существует ли натуральное число n , которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a , b и c — три различных натуральных делителя числа n ?

3. Найдите все простые числа p , для которых существуют такие натуральные n и m , что $\frac{p^2 + 1}{p + 1} = \frac{m^2}{n^2}$.

4. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Петя утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Петя быть прав?

5. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

6. На клетчатой плоскости расположены три квадрата $n \times n$, образующие фигуру, изображённую на рисунке (соседние квадраты соприкасаются по отрезку длины 1 — стороне клетки). Найдите все $n > 1$, при которых фигуру можно замостить плитками 1×3 и 3×1 .



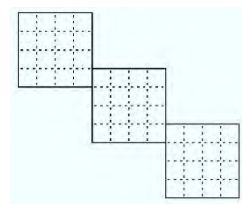
7. Для неотрицательных чисел x , y и z докажите неравенство $\min\{(x - y)^2, (y - z)^2, (z - x)^2\} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH , медиана BM , и биссектриса CD . Отрезки BM и CD пересекаются в точке K . Оказалось, что $KB = KC$. Докажите, что $KM = KH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА: ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 11 МЕСТО; ВТОРАЯ ЛИГА

1. По кругу стоят n ваз. Имеются также много алых и белых роз. Требуется поставить в каждую вазу по две розы так, чтобы количество белых роз в любых двух соседних вазах было нечётным. При каких n это возможно?
2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n , которые можно представить в виде $n = a^2 - b$ и в виде $n = c^2 - d$, где a , b , c и d — натуральные делители числа n и $a \neq c$.
3. Десятичная запись числа A состоит из m единиц, а десятичная запись числа B состоит из n единиц. Найдите все пары m и n , для которых произведение AB является палиндромом (т. е. читается одинаково слева направо и справа налево).
4. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2000 гирь различных весов. Петя утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Петя быть прав?
5. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.
6. На клетчатой плоскости расположены три квадрата $n \times n$, образующие фигуру, изображённую на рисунке (соседние квадраты соприкасаются по отрезку длины 1 — стороне клетки). Найдите все $n > 1$, при которых фигуру можно замостить плитками 1×3 и 3×1 .



7. Для неотрицательных чисел x , y и z докажите неравенство
$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

8. В треугольнике ABC угол A равен 40° , угол B равен 20° , а $AB - BC = 2$. Найдите длину биссектрисы угла C .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Сережа утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Сережа быть прав?
2. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ можно расставить по кругу n различных натуральных чисел так, чтобы сумма любых двух соседних была квадратом натурального числа.
3. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.
4. Известно, что число 5^{2019} имеет 1412 цифр и начинается с цифры 1 (т.е. его самая левая цифра равна 1). Сколько существует таких натуральных чисел n , не превосходящих 2019, для которых число 5^n начинается с цифры 1?
5. По кругу расставлено 100 точек: 50 красных и 50 синих, причём красные и синие точки чередуются. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком две разноцветные точки, причём никакие два проведённых отрезка не могут иметь общих точек (даже концов). Панда каждым ходом проводит один отрезок, а Вомбат — ровно два отрезка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
6. Некоторые 8 клеток нижней строки таблицы 9×9 покрашены в синий цвет, а все остальные клетки таблицы — в красный. За одну операцию можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 17 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, что такими операциями нельзя сделать количество синих клеток меньше 8.
7. Существует ли натуральное число n , которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a , b и c — три различных натуральных делителя числа n ?
8. Петя выбрал 980 натуральных чисел (не обязательно различных), среди которых есть все числа от 1 до 44. Могло ли так случиться, что в каком бы порядке Петя их ни записал, первое число, сумма первого и второго числа, сумма первого, второго и третьего числа и т.д. до суммы всех 980 чисел дают разные остатки при делении на 1000?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА; ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Сережа утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Сережа быть прав?
2. Петя, Вася и Гена одновременно вышли из школы и отправились в кинотеатр, который находится в 17 километрах от школы. У них есть один велосипед на троих, а на пути от школы до кинотеатра есть две велосипедные стоянки. Они решили, что Петя проедет на велосипеде до первой стоянки, оставит велосипед там, а дальше пойдет пешком. Вася пойдет пешком до первой стоянки, проедет на велосипеде до второй стоянки, а дальше пойдет пешком. Гена пойдет пешком до второй стоянки, а оттуда доедет на велосипеде до кинотеатра. Петя ходит со скоростью 5 км/ч, Вася — 4 км/ч, Гена — 6 км/ч, а ездят на велосипеде они все со скоростью 20 км/ч. Все три мальчика прибыли к кинотеатру одновременно. Найдите, какое расстояние проехал на велосипеде каждый из мальчиков.
3. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.
4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся три различных натуральных делителя, отличных от него самого, сумма которых равна 100100.
5. По кругу расставлено 100 точек: 50 красных и 50 синих, причём красные и синие точки чередуются. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком две разноцветные точки, причём никакие два проведённых отрезка не могут иметь общих точек (даже концов). Панда каждым ходом проводит один отрезок, а Вомбат — ровно два отрезка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
6. Некоторые 8 клеток нижней строки таблицы 9×9 покрашены в синий цвет, а все остальные клетки таблицы — в красный. За одну операцию можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 17 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, что такими операциями нельзя сделать количество синих клеток меньше 8.
7. Существует ли натуральное число n , которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a , b и c — три различных натуральных делителя числа n ?
8. Петя выбрал 980 натуральных чисел (не обязательно различных), среди которых есть все числа от 1 до 44. Могло ли так случиться, что в каком бы порядке Петя их ни записал, первое число, сумма первого и второго числа, сумма первого, второго и третьего числа и т.д. до суммы всех 980 чисел дают разные остатки при делении на 1000?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА; ВТОРАЯ ЛИГА

1. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Сережа утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Сережа быть прав?
2. Можно ли расставить по кругу 15 попарно взаимно простых натуральных чисел таким образом, чтобы для любых двух стоящих рядом чисел их утроенная сумма была квадратом натурального числа?
3. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.
4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся три различных натуральных делителя, отличных от него самого, сумма которых равна 100100.
5. По кругу расставлено 100 точек: 50 красных и 50 синих, причём красные и синие точки чередуются. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком две разноцветные точки, причём никакие два проведённых отрезка не должны иметь общих точек (даже концов). Панда каждым ходом проводит один отрезок, а Вомбат — ровно два отрезка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
6. Угловая клетка таблицы 9×9 покрашена в синий цвет, а остальные 80 клеток таблицы — в красный. За одну операцию можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 17 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, что такими операциями нельзя сделать всю доску синей.
7. Продавец Вася хочет продать бананы по цене 40 рублей за килограмм, а яблоки по 50 рублей за килограмм. Однако его шеф приказал продавать бананы за 50 рублей, а яблоки — за 40 рублей (тоже за килограмм). Оказалось, что после продажи всех фруктов выручка составила на 100 рублей больше, чем если бы всё продавалось по старым ценам. На сколько килограммов бананов было продано больше, чем яблок?
8. Петя выбрал 980 натуральных чисел (не обязательно различных), среди которых есть все числа от 1 до 44. Могло ли так случиться, что в каком бы порядке Петя их ни записал, первое число, сумма первого и второго числа, сумма первого, второго и третьего числа и т.д. до суммы всех 980 чисел дают разные остатки при делении на 1000?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Даны 5 гирек. Докажите, что можно выбрать какие-то две гири так, чтобы оставшиеся три гири нельзя было разбить на две группы с равными массами.
2. Существуют ли три различных натуральных числа, все три попарных суммы которых — точные квадраты?
3. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.
4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого есть три различных натуральных делителя, отличных от него самого, сумма которых равна 100100.
5. По кругу расставлено 100 точек: 50 красных и 50 синих, причём красные и синие точки чередуются. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком две разноцветные точки, причём никакие два проведённых отрезка не должны иметь общих точек (даже концов). Панда каждым ходом проводит один отрезок, а Вомбат — ровно два отрезка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
6. Угловая клетка таблицы 9×9 покрашена в синий цвет, а остальные 80 клеток таблицы — в красный. За одну операцию можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 17 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, что такими операциями нельзя сделать всю доску синей.
7. Продавец Вася хочет продать бананы по цене 40 рублей за килограмм, а яблоки по 50 рублей за килограмм. Однако его шеф приказал продавать бананы за 50 рублей, а яблоки — за 40 рублей (тоже за килограмм). Оказалось, что после продажи всех фруктов выручка составила на 100 рублей больше, чем если бы всё продавалось по старым ценам. На сколько килограммов бананов было продано больше, чем яблок?
8. Клетки квадрата 3×3 покрашены в 9 разных цветов. Разрешается сколько угодно раз переставлять строки со строками и столбцы со столбцами. Сколько разных раскрасок квадрата можно получить таким образом? Раскраски, получающиеся друг из друга поворотами и переверотами, считаются различными.