КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.11.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Аня и Дима учились в обычной школе, с 1 по 11 класс. Аня оставалась на второй год в 3 и в 7 классе, а Дима оставался на второй год лишь однажды. Могло ли оказаться, что ребята ровно 9 лет были одноклассниками?

2. В ряд стоят 98 яблок и один банан. Банан всегда говорит правду, а яблоки всегда лгут. Первый фрукт сказал: «Один из первых сорока фруктов — банан!» Последний фрукт сказал: «Нет, один из последних сорока фруктов — банан!» Фрукт в центре ряда заявил: «Я банан!». На каких позициях мог стоять банан? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. На одну чашу весов положили груз массой 25 г. Вера последовательно кладет на чаши весов гири массой 1 г , 2 г, и т.д. (каждая следующая гиря на 1 г тяжелее предыдущей). Каждую гирю она может положить на любую из чаш. Какое наименьшее количество гирь ей потребуется, чтобы уравновесить чаши?

4. Каждое натуральное число от 1 до 300 покрасили в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. Каждое число от 1 до 300, которое может быть представлено в виде суммы двух чисел разных цветов, оказалось покрашено в красный. Докажите, что не может чисел всех трех цветов быть ровно по 100.

5. Сережа задумал 14 различных натуральных чисел, и для каждых двух из них записал на доску их наибольший общий делитель. Разность любых двух записанных на доске чисел оказалась не больше 90. Докажите, что на доске встретятся два равных числа.

6. Есть 100 корзин, в каждой лежит по 10 бананов. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход можно выбрать несколько корзин (хотя бы одну) и съесть из каждой из этих корзин по банану. Запрещается выбирать тот же набор корзин, который раньше уже кто-то выбирал. Выигрывает тот, кто съест последний банан из какой-то корзины. Может ли Панда гарантировать себе победу независимо от игры Вомбата?

7. Два гонщика должны преодолеть дистанцию в 240 км. Оба стартуют одновременно с одинаковой скоростью 60 км/ч. Первый каждые два километра увеличивает скорость на 2 км/ч, а второй каждые три километра увеличивает скорость на 3 км/ч. Кто первым доберется до финиша?

8. Прямоугольник с нечетными целыми сторонами разбит на прямоугольники с целыми сторонами. Докажите, что найдется хотя бы один прямоугольник разбиения, расстояния от которого до четырех сторон исходного прямоугольника либо все четные, либо все нечетные.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.11.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. В ряд стоят 98 яблок и один банан. Банан всегда говорит правду, а яблоки всегда лгут. Первый фрукт сказал: «Один из первых сорока фруктов — банан!» Последний фрукт сказал: «Нет, один из последних сорока фруктов — банан!» Фрукт в центре ряда заявил: «Я банан!». На каких позициях мог стоять банан? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.

2. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, …, 50. Какое наименьшее количество чисел надо стереть, чтобы сумма никаких двух оставшихся на доске чисел не была равна простому числу?

3. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении стороны DA за точку A выбрана точка T так, что $AT = AD$. На биссектрисе угла BAT снаружи треугольника BAT выбрана точка K такая, что $\angle TKB = 135°$. Найдите острый угол между прямыми BT и DK.

4. Сережа задумал 14 различных натуральных чисел, и для каждых двух из них записал на доску их наибольший общий делитель. Разность любых двух записанных на доске чисел оказалась не больше 90. Докажите, что на доске встретятся два равных числа.

5. В ряд стоят 100 корзин, в каждой лежит по 10 бананов. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход можно выбрать несколько корзин (хотя бы одну) и съесть из каждой из этих корзин по банану. Запрещается выбирать тот же набор корзин, который раньше уже кто-то выбирал. Выигрывает тот, кто съест последний банан из какой-то корзины. Может ли Панда гарантировать себе победу независимо от игры Вомбата?

6. Леша выписал на доску все натуральные числа k, которые могут быть представлены в виде $\frac{1}{a_1}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{101}{a_{101}}=k$, где $a_1, a_3, \ldots, a_{101}$ — некоторые натуральные числа. Докажите, что у него на доске выписано ровно 2600 различных чисел.

7. Назовем натуральное число $t > 1$ *счастливым*, если для любой пары натуральных чисел n и k из того, что $tn+k$ делится на $tk+n$ следует, что n делится на k.

a) (*2 балла*). Докажите, что число 5 — счастливое.

b) (5 баллов). Найдите все счастливые числа.

8. Дано нечетное число $k > 1$ и натуральное $n > k$. В компании из n школьников среди любых k школьников найдется школьник, знакомый с остальными k–1 школьниками. Найдите все значения n и k, при которых можно утверждать, что в такой компании всегда найдется школьник, знакомый со всеми. Знакомства взаимные.

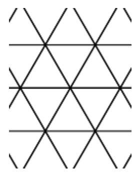
LII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ИЖЕВСК, 02-08.11.2018

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.11.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. На одну чашу весов положили груз массой 25 г. Вера последовательно кладет на чаши весов гири массой 1 г , 2 г, и т.д. (каждая следующая гиря на 1 г тяжелее предыдущей). Каждую гирю она может положить на любую из чаш. Какое наименьшее количество гирь ей потребуется, чтобы уравновесить чаши?

2. Прямые трёх направлений разбивают плоскость на одинаковые равносторонние треугольники (см. рис.). Каждая сторона такого треугольника покрашена в один из N цветов так, что каждый путь между любыми двумя несоседними вершинами проходит по отрезкам хотя бы двух разных цветов. При каком наименьшем N такое возможно?



3. При каких натуральных $n \geq 3$ числа $1, 2, \ldots, n$ можно расставить по кругу в таком порядке, чтобы сумма каждых двух соседних чисел делилась на 3 или на 5?

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D так, что $AB = CD$. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков BC и AD, отсекает от угла ADC равнобедренный треугольник.

5. Прямоугольник с нечетными целыми сторонами разбит на прямоугольники с целыми сторонами. Докажите, что найдется хотя бы один прямоугольник разбиения, расстояния от которого до четырех сторон исходного прямоугольника либо все четные, либо все нечетные.

6. Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1}+r_n^2$ при $n \geq 2$, где r_n — остаток от деления a_{n-1} на n. Какое наибольшее количество одинаковых членов может идти подряд в этой последовательности?

7. На биссектрисе AL треугольника ABC отмечена точка D так, что $BL = BD$. Луч BD пересекает сторону AC в точке E. Отрезки LE и CD пересекаются в точке F. Докажите, что площадь четырехугольника $DBLF$ равна площади треугольника CEF.

8. Конечное множество S натуральных чисел таково, что если некоторое число x содержится в S, то в S содержатся и все натуральные делители x. Непустое подмножество T множества S называется *хорошим*, если частное любых двух элементов T является степенью простого числа с целым показателем. Непустое подмножество T множества S называется *плохим*, если ни у каких двух различных элементов T частное не является степенью простого числа с целым показателем. (В частности, каждое одноэлементное подмножество S одновременно хорошее и плохое.) Докажите, что наибольшее количество элементов, которое может быть в хорошем подмножестве S, равно наименьшему количеству попарно непересекающихся плохих подмножеств S, дающих в объединении S.

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Аня и Дима учились в обычной школе, с 1 по 11 класс. Аня оставалась на второй год в 3 и в 7 классе, а Дима оставался на второй год лишь однажды. Могло ли оказаться, что ребята ровно 9 лет были одноклассниками?*

Ответ. Могло. Решение. Пусть в школе по одному классу в каждой параллели, Аня поступила в первый класс на год раньше Димы, а Дима остался на второй год в 6 классе. Тогда Аня с Димой были одноклассниками с 3 по 6 класс, а потом — с 7 (когда Аня училась в нем второй год) по 11 класс.

Задача 2. *В ряд стоят 98 яблок и один банан. Банан всегда говорит правду, а яблоки всегда лгут. Первый фрукт сказал: «Один из первых сорока фруктов — банан!» Последний фрукт сказал: «Нет, один из последних сорока фруктов — банан!» Фрукт в центре ряда заявил: «Я банан!». На каких позициях мог стоять банан? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

Ответ. На первой, последней и любой с 41-ой по 59-ую. Решение. Если банан стоит на одном из концов ряда, то он говорит правду, а яблоки в центре и на другом конце ряда врут, как им и положено. Если банан стоит на позициях с 41-ой по 59-ую, он ничего не говорит или говорит правду, а яблоки на обоих концах ряда врут — снова все в порядке. Наконец, если банан стоит на позициях со второй по сороковую или с 60-ой по 98-ую, то одно из яблок на концах ряда говорит правду, что невозможно.

Задача 3. *На одну чашу весов положили груз массой 25 г. Вера последовательно кладет на чаши весов гири массой 1 г , 2 г, и т.д. (каждая следующая гиря на 1 г тяжелее предыдущей). Каждую гирю она может положить на любую из чаш. Какое наименьшее количество гирь ей потребуется, чтобы уравновесить чаши?*

Ответ. Девять. Решение. *Пример*: $25+1+2+3+4 = 5+6+7+8+9$. *Оценка*. Очевидно, сумма весов положенных на чаши гирь должна быть не меньше 25 г, а общий вес гирь и груза должен быть четен. Так как $1+2+3+4+5+6 = 21$, гирь должно быть не меньше семи, а если гирь 7 или 8, то сумма их весов плюс вес груза нечетна.

Задача 4. *Каждое натуральное число от 1 до 300 покрасили в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. Каждое число от 1 до 300, которое может быть представлено в виде суммы двух чисел разных цветов, оказалось покрашено в красный. Докажите, что не может чисел всех трех цветов быть ровно по 100.*

Решение. Если число 1 красное, то после каждого не красного числа, кроме 300, должно идти красное, и получается, что у нас красных чисел не меньше, чем синих и зеленых вместе, а их должно быть вдвое меньше. Если число 1 зеленое, то после каждого красного числа, кроме 300, должно идти красное, и после каждого синего — красное. Но тогда все числа после первого синего должны быть красными, то есть синих чисел не больше одного. Аналогично в случае, когда 1 — синее, зеленых чисел не больше одного.

Задача 5. *Сережа задумал 14 различных натуральных чисел, и для каждых двух из них записал на доску их наибольший общий делитель. Разность любых двух записанных на доске чисел оказалась не больше 90. Докажите, что на доске встретятся два равных числа.*

Решение. Так как из 14 чисел можно образовать $14\cdot 13/2 = 91$ пару, если на доске нет двух одинаковых чисел, то на ней 91 число, идущее подряд. Среди них ровно 13 делятся на 7. Если среди 14 задуманных чисел ровно k делятся на 7, то среди чисел на доске делиться на 7 должны ровно $k(k-1)/2$. Но $k(k-1)/2$ не равно 13 ни при каком натуральном k.

Задача 6. *Есть 100 корзин, в каждой лежит по 10 бананов. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход можно выбрать несколько корзин (хотя бы одну) и съесть из каждой из этих корзин по банану. Запрещается выбирать тот же набор корзин, который раньше уже кто-то выбирал. Выигрывает тот, кто съест последний банан из какой-то корзины. Может ли Панда гарантировать себе победу независимо от игры Вомбата?*

Ответ. Может. Решение. Первым ходом Панда берет по банану их каждой корзины, следующими семью ходами берет по банану из каждой корзины, из которой Вомбат не брал банан предыдущим ходом. После восьмого хода Панды во всех корзинах останется по два банана, после восьмого хода Вомбата в какой-то корзине K окажется один банан. Сделанными к этому моменту ходами использованы 16 наборов корзин, а наборов корзин, содержащих корзину K, очевидно больше. Взяв по одному банану из каждой корзины какого-либо из таких наборов, Панда опустошит корзину K и выиграет.

Задача 7. *Два гонщика должны преодолеть дистанцию в 240 км. Оба стартуют одновременно с одинаковой скоростью 60 км/ч. Первый каждые два километра увеличивает скорость на 2 км/ч, а второй каждые три километра увеличивает скорость на 3 км/ч. Кто первым доберется до финиша?*

Ответ. Первый. Решение. Достаточно показать, что если первый гонщик проехал отметку $6k$ км, где k — натуральное число, не позже второго, то отметку $6(k+1)$ км он проедет раньше второго. Так как два километра, следующих после отметки $6k$ км, оба гонщика едут с одинаковой скоростью $x = 60+6k$ км/ч, а два километра, предшествующих отметке $6(k+1)$ км, первый гонщик едет быстрее второго ($x+4$ км/ч против $x+3$ км/ч), достаточно показать, что если первый гонщик прошел отметку $6k+2$ км не позже второго, то он пройдет и отметку $6k+4$ км раньше второго. Действительно, первому гонщику на эти 2 км нужно $2/(x+2)$ ч., а второму — $1/x+1/(x+3)$ ч., и $2/(x+2) < 1/x+1/(x+3) \Leftrightarrow 2x(x+3) < (x+2)(2x+4)$. Раскрывая в последнем неравенстве скобки и приводя подобные члены, приходим к очевидному неравенству $2x+8 > 0$.

Задача 8. *Прямоугольник с нечетными целыми сторонами разбит на прямоугольники с целыми сторонами. Докажите, что найдется хотя бы один прямоугольник разбиения, расстояния от которого до четырех сторон исходного прямоугольника либо все четные, либо все нечетные.*

Решение. Разлинуем прямоугольник на квадратные клетки со стороной 1 и раскрасим их в шахматном порядке. Так как обе стороны прямоугольника нечетны, все угловые клетки будут одного цвета, и клеток этого цвета (пусть белого) на доске будет на одну больше, чем черных. Поэтому среди прямоугольников разбиения найдется хотя бы один такой, в котором белых клеток больше, чем черных. Все его углы будут белыми, а стороны — нечетными. Посмотрим на прямоугольник, в котором противоположными углами являются левые-верхние углы большого и маленького прямоугольников. Они оба белые, значит два оставшихся угла одного цвета, и потому расстояния от нашего прямоугольника до левой и верхней сторон имеют одинаковую четность. Аналогично доказывается совпадение четностей расстояний от нашего прямоугольника до любых двух смежных сторон исходного, откуда и следует утверждение задачи.

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *В ряд стоят 98 яблок и один банан. Банан всегда говорит правду, а яблоки всегда лгут. Первый фрукт сказал: «Один из первых сорока фруктов — банан!» Последний фрукт сказал: «Нет, один из последних сорока фруктов — банан!» Фрукт в центре ряда заявил: «Я банан!». На каких позициях мог стоять банан? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

<u>Ответ</u>. На первой, последней и любой с 41-ой по 59-ую. <u>Решение</u>. Если банан стоит на одном из концов ряда, то он говорит правду, а яблоки в центре и на другом конце ряда врут, как им и положено. Если банан стоит на позициях с 41-ой по 59-ую, он ничего не говорит или говорит правду, а яблоки на обоих концах ряда врут — снова все в порядке. Наконец, если банан стоит на позициях со второй по сороковую или с 60-ой по 98-ую, то одно из яблок на концах ряда говорит правду, что невозможно.

Задача 2. *На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, …, 50. Какое наименьшее количество чисел надо стереть, чтобы сумма никаких двух оставшихся на доске чисел не была равна простому числу?*

<u>Ответ</u>. 25. <u>Решение</u>. *Пример*. Сотрем все нечетные числа, сумма любых двух оставшихся будет четна и больше 2. *Оценка*. Разобьем числа от 1 до 46 на 23 пары дающих в сумме 47, а числа от 47 до 50 — на две пары дающих в сумме 97. Мы должны стереть хотя бы по одному числу из каждой пары, то есть не меньше 25 чисел.

Задача 3. *Дан квадрат ABCD. На продолжении стороны DA за точку A выбрана точка T так, что AT = AD. На биссектрисе угла BAT снаружи треугольника BAT выбрана точка K такая, что $\angle TKB = 135°$. Найдите острый угол между прямыми BT и DK.*

<u>Ответ</u>. 67,5°. <u>Решение</u>. Заметим, что треугольники KAT и KAB равны: KA — общая, $AT = AB$ и $\angle KAT = \angle KAB$. Значит, $\angle TKA = \angle BKA = 67{,}5°$. Следовательно, $\angle KBA = 180°–45°–67{,}5° = 67{,}5° = \angle BKA$, откуда $AK = AB = AD$ и $\angle ADK = \angle AKD = (180°–\angle KAD/2) = 22{,}5°$. Пусть E — точка пересечения прямых BT и DK. Из треугольника DET имеем $\angle DET = 180°–45°–22{,}5° = 112{,}5°$, и потому смежный с DET острый угол равен $180°–112{,}5° = 67{,}5°$.

Задача 4. *Сережа задумал 14 различных натуральных чисел, и для каждых двух из них записал на доску их наибольший общий делитель. Разность любых двух записанных на доске чисел оказалась не больше 90. Докажите, что на доске встретятся два равных числа.*

<u>Решение</u>. Так как из 14 чисел можно образовать $14\cdot 13/2 = 91$ пару, если на доске нет двух одинаковых чисел, то на ней 91 число, идущее подряд. Среди них ровно 13 делятся на 7. Если среди 14 задуманных чисел ровно k делятся на 7, то среди чисел на доске делиться на 7 должны ровно $k(k–1)/2$. Но $k(k–1)/2$ не равно 13 ни при каком натуральном k.

Задача 5. *В ряд стоят 100 корзин, в каждой лежит по 10 бананов. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход можно выбрать несколько корзин (хотя бы одну) и съесть из каждой из этих корзин по банану. Запрещается выбирать тот же набор корзин, который раньше уже кто-то выбирал. Выигрывает тот, кто съест последний банан из какой-то корзины. Может ли Панда гарантировать себе победу независимо от игры Вомбата?*

<u>Ответ</u>. Может. <u>Решение</u>. Первым ходом Панда берет по банану их каждой корзины, следующими семью ходами берет по банану из каждой корзины, из которой Вомбат не брал банан предыдущим ходом. После восьмого хода Панды во всех корзинах останется по два банана, после восьмого хода Вомбата в какой-то корзине K окажется один банан. Сделанными к этому моменту ходами использованы 16 наборов корзин, а наборов корзин, содержащих корзину K, очевидно больше. Взяв по одному банану из каждой корзины какого-либо из таких наборов, Панда опустошит корзину K и выиграет.

Задача 6. *Леша выписал на доску все натуральные числа k, которые могут быть представлены в виде* $\frac{1}{a_1}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{101}{a_{101}}=k$, *где $a_1, a_3, \ldots, a_{101}$ — некоторые натуральные числа. Докажите, что у него на доске выписано ровно 2600 различных чисел.*

Решение. Докажем по индукции более общий факт: в виде $\frac{1}{a_1}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{2n-1}{a_{2n-1}}=k$ при $n\geq 3$ можно представить все числа от 1 до n^2, кроме n^2–1: при $n = 51$ получится как раз наше утверждение, так как $51^2 = 2601$. *База* при $n = 3$: 1 = 1/9+3/9+5/9, 2 = 1/1+3/8+5/8, 3 = 1/1+3/4+5/4, 4 = 1/6+3/1+5/6, 5 = 1/1+3/1+5/5, 6 = 1/4+3/4+5/1, 7 = 1/2+3/2+5/1, 9 = 1/1+3/1+5/1. *Переход*. Пусть мы уже все доказали для $m = n$, докажем для $m = n+1$. Во-первых, 1 мы получим, заменив все знаменатели суммой всех числителей. Во-вторых, все числа от 2 до n^2-1 мы получим, получив из первых n дробей все числа от 1 до n^2-2 и прибавив к каждому из них $1 = (2n+1)/(2n+1)$. А если мы получим из первых n дробей все числа от n^2-2n-1 (при $n \geq 3$ $n^2-2n-1 > 0$) до n^2-2 и прибавим в каждому из них число $(2n+1)/1$, то получим все числа от n^2 до n^2+2n-1. Кроме того, мы можем получить число $(n+1)^2$, сделав все знаменатели единицами.

Осталось показать, что получить число $(n+1)^2-1$ мы не сможем. Возьмем сумму всех дробей со знаменателями 1, равную n^2, и посмотрим, что будет происходить при увеличении знаменателей. Если мы увеличим хотя бы один знаменатель у дроби с числителем не меньше 5, то сумма уменьшится по крайней мере на 2. Если же мы будем увеличивать знаменатели только у дробей с числителями 1 и 3, то во избежание дробной суммы придется увеличить их оба, и тогда сумма дробей снова уменьшится хотя бы на 2. Числа $(n+1)^2-1$ мы в обоих случаях не получим.

Задача 7. *Назовем натуральное число $t > 1$ **счастливым**, если для любой пары натуральных чисел n и k из того, что $tn+k$ делится на $tk+n$ следует, что n делится на k. **a)** (2 балла). Докажите, что число 5 — счастливое. **b)** (5 баллов). Найдите все счастливые числа.*

а) Решение. Положим $\frac{tn+k}{tk+n}=A$.

Заметим, что в данном случае $A < 5$, так как $5(5k+n) > 5n+k$. Проверим случаи $A = 1, 2, 3, 4$. Если $A = 1$, то $5n+k = 5k+n$, откуда $n = k$. Если $A = 2$, то $5n+k = 10k+2n$, откуда $3n = 9k$, или $n = 3k$. Если $A = 3$, то $5n+k = 15k+3n$, откуда $2n = 14k$, или $n = 7k$. Если $A = 4$, то $5n+k = 20k+4n$, откуда $n = 19k$. Во всех случаях мы получили, что n делится на k.

b) Ответ. 2, 3, 5. Решение. Во-первых, отдельно проверим, что $t = 2$ счастливое: так как $2(2k+n) > 2n+k$, то делимость эквивалентна равенству $2k+n = 2n+k$, или $n = k$. Далее, предположим, что некоторое $t > 2$ счастливое. Как и в пункте *а*), отношение $A=\frac{tn+k}{tk+n}<t$, значит, A принимает значения от 1 до t–1. В случае $A = 2$ мы имеем $tn+k = 2tk+2n$, или $\frac{n}{k}=\frac{2t-1}{t-2}=2+\frac{3}{t-2}$. Так как отношение $\frac{n}{k}$ — целое, то и правая часть предыдущего равенства целая, что возможно только при $t-2 = 1$ или $t-2 = 3$. В последнем случае $t = 5$ и это число мы уже проверили в пункте (*а*), в первом случае $t = 3$ и оно тоже счастливое: при $3n+k = 3k+n$ сразу же $n = k$, а при $3n+k = 6k+2n$ получается $n = 5k$.

Остальные же числа не счастливые, так как можно подобрать два числа n и k, отношение которых будет равно $\frac{2t-1}{t-2}$, то есть не будет являться целым, но равенство $tn+k = 2tk+2n$ выполнено.

Задача 8. *Дано нечетное число $k > 1$ и натуральное $n > k$. В компании из n школьников среди любых k школьников найдется школьник, знакомый с остальными k–1 школьниками. Найдите все значения n и k, при которых можно утверждать, что в такой компании всегда найдется школьник, знакомый со всеми. Знакомства взаимные.*

Ответ. Тогда и только тогда, когда n нечетно. Решение. Пусть n четно. Покажем, что можно познакомить между собой n школьников так, что никакой школьник не будет знаком со всеми остальными, но среди любых k из них найдется школьник, знающий оставшихся k–1 школьников. Разобьем школьников на пары и познакомим их так, чтобы школьники из одной пары были незнакомы между собой, а из разных пар — знакомы. Выберем любых k школьников. Поскольку компанию из нечетного числа школьников нельзя разбить на пары, среди них найдется такой, у которого незнакомый ему школьник в эту группу из k человек не вошел. Поэтому этот школьник знает всех остальных k–1 школьников. Таким образом, при четном n искомый способ знакомства существует.

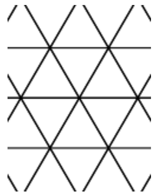
Пусть n нечетно. Достаточно показать, что если нет школьника, который знает всех, то условие задачи не выполнено. В компании найдется школьник Вася, которому незнакомы хотя бы два других школьника (иначе компания должна разбиться на пары незнакомых школьников, что при нечетном n невозможно). Покажем, что в этой компании не будет выполнено условие о группе из k школьников. Будем набирать эту группу постепенно. Сначала поместим в нее Васю и каких–то двух незнакомых ему школьников. На каждом шаге будем добавлять в группу двух еще не добавленных в нее незнакомых друг с другом школьников. Поскольку в каждый момент времени количество школьников в группе будет нечетным, то либо на каком-то шаге в группе окажется ровно k школьников (и тогда по построению у каждого в группе будет незнакомый ему школьник из группы), либо в какой-то момент окажется, что среди оставшихся школьников все попарно знакомы. Во втором случае у любого оставшегося школьника есть незнакомый ему школьник из группы. Поэтому, если мы доберем группу до k школьников как угодно, то у любого школьника в группе снова будет незнакомый школьник среди остальных школьников группы. Итак, снова найдена группа из k школьников, среди которых нет такого, который знает всех остальных из группы.

Решения задач командной олимпиады 8 класса

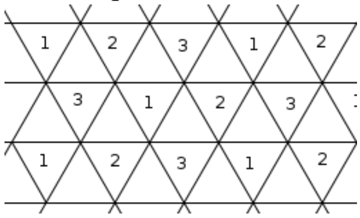
Задача 1. *На одну чашу весов положили груз массой 25 г. Вера последовательно кладет на чаши весов гири массой 1 г , 2 г, и т.д. (каждая следующая гиря на 1 г тяжелее предыдущей). Каждую гирю она может положить на любую из чаш. Какое наименьшее количество гирь ей потребуется, чтобы уравновесить чаши?*

<u>Ответ</u>. Девять. <u>Решение</u>. *Пример*: 25+1+2+3+4 = 5+6+7+8+9. *Оценка*. Очевидно, сумма весов положенных на чаши гирь должна быть не меньше 25 г, а общий вес гирь и груза должен быть четен. Так как 1+2+3+4+5+6 = 21, гирь должно быть не меньше семи, а если гирь 7 или 8, то сумма их весов плюс вес груза нечетна.

Задача 2. *Прямые трёх направлений разбивают плоскость на одинаковые равносторонние треугольники (см. рис.). Каждая сторона такого треугольника покрашена в один из N цветов так, что каждый путь между любыми двумя несоседними вершинами проходит по отрезкам хотя бы двух разных цветов. При каком наименьшем N такое возможно?*



<u>Ответ</u>. При $N = 3$. <u>Решение</u>. Рассмотрим шесть отрезков, исходящих из одного узла сетки. Если



среди них найдется два одноцветных несоседних отрезка, то путь, состоящий из них, окажется одноцветным, при этом этот путь соединяет две несмежные вершины. Следовательно, для покраски этих шести отрезков необходимо минимум 3 цвета. Пример для $n = 3$: см. рис. Если внутри треугольника стоит цифра, то все его ребра окрашены в такой цвет. Если рассмотреть любой цвет, то ребра этого цвета образуют изолированные треугольники (а в треугольнике все вершины – соседние), поэтому все пути между несмежными вершинами проходят по ребрам хотя бы двух цветов.

Задача 3. *При каких натуральных $n \geq 3$ числа 1, 2, ..., n можно расставить по кругу в таком порядке, чтобы сумма каждых двух соседних чисел делилась на 3 или на 5?*

<u>Ответ</u>. При всех $n \geq 6$. <u>Решение</u>. Если $3 \leq n \leq 5$, то среди чисел от 1 до n только число 3 делится на 3, и потому рядом с ним может стоять только двойка, а мест рядом с ним — два. Далее заметим, что можно нужным образом расставить по кругу числа от 1 до 6: 1 6 3 2 4 5, от 1 до 7: 1 5 4 6 3 7 2 и от 1 до 8: 1 6 3 2 7 8 4 5. Заметим теперь, что в каждой из этих расстановок есть два стоящих рядом числа, делящихся на 3, и два стоящих рядом числа, дающие при делении на 3 остатки 1 и 2. Поэтому в любую такую расстановку можно добавить с сохранением описанных свойств три следующих числа: число, делящееся на 3 — между числами, делящимися на 3, а числа, дающие при делении на 3 остатки 1 и 2, между числами, дающими при делении на 3 остатки 1 и 2, так, чтобы числа, дающие остатки 1 и 2, чередовались. Таким образом мы получаем расстановки всех чисел от 1 до 9, от 1 до 10 и от 1 до 11, затем — расстановки всех чисел от 1 до 12, от 1 до 13 и от 1 до 14, и т.д.

Задача 4. *На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D так, что AB = CD. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков BC и AD, отсекает от угла ADC равнобедренный треугольник.*

<u>Решение</u>. Пусть L, M и N — середины отрезков CD, AD и BC соответственно. Треугольник LKN подобен треугольнику DKM по трем углам. Пусть k — коэффициент этого подобия. Положим $AB = CD = c$. Тогда $KD = LD–LK = c/2–kKD$, откуда $KD = c/2(1+k)$. С другой стороны, $MD = (AB–DB)/2 = c/2–LN = c/2–kMD$, откуда $MD = c/2(1+k) = KD$, что и завершает доказательство. <u>Замечание</u>. Другое решение можно получить, если треугольник ACD достроить до параллелограмма $FACD$. Тогда MN (см. решение) будет средней линией треугольника FCB, а треугольник FAB — равнобедренным.

Задача 5. *Прямоугольник с нечетными целыми сторонами разбит на прямоугольники с целыми сторонами. Докажите, что найдется хотя бы один прямоугольник разбиения, расстояния от которого до четырех сторон исходного прямоугольника либо все четные, либо все нечетные.*

<u>Решение</u>. Разлинуем прямоугольник на квадратные клетки со стороной 1 и раскрасим их в шахматном порядке. Так как обе стороны прямоугольника нечетны, все угловые клетки будут одного цвета, и клеток этого цвета (пусть белого) на доске будет на одну больше, чем черных. Поэтому среди прямоугольников разбиения найдется хотя бы один такой, в котором белых клеток больше, чем черных. Все его углы будут

белыми, а стороны — нечетными. Посмотрим на прямоугольник, в котором противоположными углами являются левые-верхние углы большого и маленького прямоугольников. Они оба белые, значит два оставшихся угла одного цвета, и потому расстояния от нашего прямоугольника до левой и верхней сторон имеют одинаковую четность. Аналогично доказывается совпадение четностей расстояний от нашего прямоугольника до любых двух смежных сторон исходного, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 6. *Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1}+r_n^2$ при $n \geq 2$, где r_n — остаток от деления a_{n-1} на n. Какое наибольшее количество одинаковых членов может идти подряд в этой последовательности?*

Ответ. Три. Решение. Вычислим первые 12 членов последовательности: 1, 2, 6, 10, 10, 26, 51, 60, 96, 132, 132, 132. Таким образом, три одинаковых числа подряд в ней есть. Допустим, есть четыре одинаковых числа x подряд. Пусть их номера n, n+1, n+2, n+3. Тогда x делится на n, n+1 и n+2, а, значит, не меньше их НОК, который не меньше $n(n+1)(n+2)/2$. С другой стороны, x не превосходит

$$a_4+4^2+5^2+6^2+\ldots+(n-1)^2 < 1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2 = (n-1)n(2n-1)/6.$$

Но, как нетрудно проверить, выполнено неравенство $n(n+1)(n+2)/2 > (n-1)n(2n-1)/6$: после деления на n, раскрытия скобок и приведения подобных членов оно сводится к очевидному неравенству $n^2+12n+5 > 0$. Таким образом, предположение о существовании четырех идущих подряд равных чисел приводит к противоречию.

Задача 7. *На биссектрисе AL треугольника ABC отмечена точка D так, что BL = BD. Луч BD пересекает сторону AC в точке E. Отрезки LE и CD пересекаются в точке F. Докажите, что площадь четырехугольника DBLF равна площади треугольника CEF.*

Решение. Заметим, что площади четырехугольника $DBLF$ и треугольника CEF равны тогда и только тогда, когда равны площади треугольников DBC и ELC. Пусть h_D и h_E — длины высот из точек D и E на прямую BC. Тогда $S_{DBC}:S_{ELC} = (BC\cdot h_D):(CL\cdot h_E) = (BC:CL)\cdot(h_D:h_E)$. Из подобия $h_D:h_E = BD:BE$, поэтому для окончания решения осталось доказать, что $BC:CL = BE:BD$. Вычитая из обеих частей 1, учитывая $BL = BD$, получаем, что достаточно доказать, что $BD:CL = DE:BL$. Но из подобия (по двум углам) треугольников ABD и ACL получаем $BD:CL=AD:AL$, а из подобия AED и ABL — $DE:BL=AD:AL$.

Задача 8. *Конечное множество S натуральных чисел таково, что если некоторое число x содержится в S, то в S содержатся и все натуральные делители x. Непустое подмножество T множества S называется* ***хорошим****, если частное любых двух элементов T является степенью простого числа с целым показателем. Непустое подмножество T множества S называется* ***плохим****, если ни у каких двух различных элементов T частное не является степенью простого числа с целым показателем. (В частности, каждое одноэлементное подмножество S одновременно хорошее и плохое.) Докажите, что наибольшее количество элементов, которое может быть в хорошем подмножестве S, равно наименьшему количеству попарно непересекающихся плохих подмножеств S, дающих в объединении S.*

Решение. Пусть k — наибольшее число такое, что в S есть некоторое число n, кратное k-й степени простого числа. Тогда в S есть хорошее множество из k+1 элемента: если n делится на p^k для некоторого простого p, то множество $\{n,\frac{n}{p},\frac{n}{p^2},\ldots,\frac{n}{p^k}\}$ — хорошее. Легко видеть, что в каждом хорошем множество все частные должны быть степенями одного и того же простого числа, так что больше, чем k+1 число, в хорошем множестве быть не может.

Докажем, что S разбивается на k+1 плохое множество. Для этого разложим каждое число $x \in S$ на простые множители и подсчитаем количество $f(x)$ сомножителей (не обязательно различных) в этом разложении. Для каждого целого i, $0 \leq i \leq k$, рассмотрим множество S_i, состоящее из всех элементов S, у которых $f(x)$ даёт при делении на k+1 остаток i. Очевидно, каждый элемент S попал ровно в одно из множеств S_i. Докажем, что множества S_i плохие. Действительно, если множество S_i не плохое, то найдутся два различных числа $x, y \in S_i$, отношение которых равно p^m, где p — некоторое простое число. Но тогда m кратно k+1, и, поскольку ни один элемент S не кратен p^{k+1}, $m = 0$ и $x = y$, что и требовалось.

Допустим, удалось разбить S на $m \leq k$ плохих множеств. Но тогда хотя бы в одно из них попадет хотя бы два элемента из (k+1)-элементного хорошего множества, что невозможно. Итак, k+1 — минимальное количество непересекающихся плохих множеств, дающих в объединении S, что и завершает доказательство.