МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Вася разрезал прямоугольник на два прямоугольника, сумма периметров которых равна 100. Петя разрезал такой же прямоугольник на два прямоугольника, сумма периметров которых равна 140. Чему мог быть равен периметр исходного прямоугольника?

2. На прямой отмечено 20 точек. На каждой из отмеченных точек написана сумма расстояний от неё до всех остальных отмеченных точек. Могут ли написанные числа быть двадцатью последовательными натуральными числами в каком-то порядке? (Расстояния между точками не обязательно натуральные).

3. В ряд выписана 101 цифра: нули и единицы. Затем для каждой некрайней цифры a выбирается цифра, которая хотя бы дважды встречается среди a и её соседей слева и справа, и эта цифра записывается под a. С полученной строчкой из 99 цифр делается та же операция, и т.д., пока не получится одна цифра. Оказалось, что эта цифра — единица. При каком наименьшем количестве исходных единиц это могло получиться?

4. Квадрат 9×9 клеток разбит на квадраты 3×3 и прямоугольники 1×2 (доминошки), причём каждая доминошка имеет общий отрезок с каким-нибудь квадратом 3×3. Какое наименьшее число квадратов 3×3 может быть в этом разбиении?

5. На доске написаны 55 цифр: одна единица, две двойки, три тройки и т. д., девять девяток, десять нулей. Петя составил из них 25-значное число, а Вася составил 30-значное число из остальных цифр. Может ли произведение этих двух чисел быть числом, состоящим из одних единиц?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. На прямой отмечено 100 различных точек. Для каждой точки посчитали сумму расстояний от этой точки до всех остальных. Могут ли все 100 полученных чисел быть различными?

2. В ряд выписана 101 цифра: нули и единицы. Затем для каждой некрайней цифры a выбирается цифра, которая хотя бы дважды встречается среди a и её соседей слева и справа, и эта цифра записывается под a. С полученной строчкой из 99 цифр делается та же операция, и т.д., пока не получится одна цифра. Оказалось, что эта цифра — 1. При каком наименьшем количестве исходных единиц это могло получиться?

3. Числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+(a+b)^2 = c^2+d^2+(c+d)^2$. Докажите, что $a^4+b^4+(a+b)^4 = c^4+d^4+(c+d)^4$.

4. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Оказалось, что $AK = CL$ и $\angle ALK+\angle BKL = 60°$. Докажите, что $KL = BC$.

5. Дано натуральное n. Докажите, что у любых целых чисел a_1, a_2, ..., a_{n+1} существует перестановка b_1, b_2, ..., b_{n+1} такая, что $(b_1-b_2)(b_2-b_3)...(b_n-b_{n+1})$ кратно n!.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В ряд выписана 101 цифра: нули и единицы. Затем для каждой некрайней цифры a выбирается цифра, которая хотя бы дважды встречается среди a и её соседей слева и справа, и эта цифра записывается под a. С полученной строчкой из 99 цифр делается та же операция, и т.д., пока не получится одна цифра. Оказалось, что эта цифра — 1. При каком наименьшем количестве исходных единиц это могло получиться?

2. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах B, C, E и F равны, а прямые BC и EF параллельны. Докажите, что $AB+AF = CD+DE$.

3. Дано натуральное n. Докажите, что у любых целых чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n+1}$ существует перестановка $b_1, b_2, ..., b_{2n+1}$ такая, что $(b_1-b_2)(b_3-b_4)...(b_{2n-1}-b_{2n})$ кратно $2^n\cdot n!$.

4. На столе стоят три стопки дисков. В каждой стопке снизу лежат 11 чёрных дисков, потом 10 белых, потом 9 чёрных, 8 белых, …, 1 чёрный. Аня и Боря по очереди берут диски из стопок. Каждым ходом нужно взять несколько одноцветных дисков с верха одной стопки. Начинает Аня. Проигрывает тот, кто взял последний диск. Кто выиграет при правильной игре?

5. Вещественные числа a, b и c лежат на промежутке $[-2;2]$. Какое наибольшее значение может принимать $|a^2-bc+1|+|b^2-ca+1|+|c^2-ab+1|$?

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Вася разрезал прямоугольник на два прямоугольника, сумма периметров которых равна 100. Петя разрезал такой же прямоугольник на два прямоугольника, сумма периметров которых равна 140. Чему мог быть равен периметр исходного прямоугольника?*

Ответ. 80. Решение. Пусть стороны прямоугольника равны a и b.Понятно, что Вася резал прямоугольник параллельно одной паре сторон, а Петя — параллельно другой. При этом сумма периметров прямоугольников у одного из них получилась равной $2a+4b$, а у другого — $2b+4a$. В сумме это даёт $6a+6b$, то есть утроенный периметр исходного прямоугольника. Таким образом, периметр исходного прямоугольника равен $(100+140)/3 = 80$.

Задача 2. *На прямой отмечено 20 точек. На каждой из отмеченных точек написана сумма расстояний от неё до всех остальных отмеченных точек. Могут ли написанные числа быть двадцатью последовательными натуральными числами в каком-то порядке? (Расстояния между точками не обязательно натуральные)*

Ответ. Не могут. Решение. Пронумеруем точки в порядке, в котором они лежат на прямой. При переходе от 10-ой точки к 11-ой 10 расстояний уменьшаются на расстояние между 10-ой и 11-ой точками, а 10 — увеличиваются (мы считаем здесь, что расстояние от точки до неё самой равно 0 и приписываем этот 0 к сумме расстояний), поэтому сумма расстояний не меняется. Таким образом, суммы расстояний от 10-ой и 11-ой точек до всех остальных равны, а среди 20 последовательных натуральных чисел нет равных.

Задача 3. *В ряд выписана 101 цифра: нули и единицы. Затем для каждой некрайней цифры а выбирается цифра, которая хотя бы дважды встречается среди а и её соседей слева и справа, и эта цифра записывается под а. С полученной строчкой из 99 цифр делается та же операция, и т.д., пока не получится одна цифра. Оказалось, что эта цифра — единица. При каком наименьшем количестве исходных единиц это могло получиться?*

Ответ. 2. Решение. Понятно, что одна единица погибнет после первого же хода. А вот две единицы, расположенные на 50-м и 51-м местах, выживут, даже если на остальных местах будут нули. В самом деле, после каждого хода цепочки нулей с обеих сторон будут укорачиваться на один нуль, а единицы в центре будут сохраняться. После 49-го хода нули справа исчезнут, а слева останется один нуль, и после 50-го хода останется одна единица.

Задача 4. *Квадрат 9×9 клеток разбит на квадраты 3×3 и прямоугольники 1×2 (доминошки), причём каждая доминошка имеет общий отрезок с каким-нибудь квадратом 3×3. Какое наименьшее число квадратов 3×3 может быть в этом разбиении?*

Ответ. 5. Решение. Прямоугольник, составленный из трёх верхних строк квадрата 9×9, должны пересекать хотя бы два квадрата 3×3 — иначе найдётся доминошка, пересекающая верхнюю строку и удалённая от ближайшего квадрата 3×3 хотя бы на одну клеточку. Прямоугольник из трёх нижних строк также должны пересекать хотя бы два квадрата 3×3. Одновременно пересекать оба прямоугольника один квадрат 3×3 не может. Поэтому квадратов 3×3 должно быть хотя бы четыре. Но ровно четыре их быть не может, так как тогда доминошками надо будет замостить нечётное число ($81-36 = 45$) клеточек, что невозможно. Поэтому квадратов 3×3 хотя бы пять. Пример разбиения, когда квадратов ровно пять, строится, например, так. Верхние две строки мостим девятью вертикальными доминошками, три следующих строки мостим тремя квадратами 3×3, ещё два квадрата 3×3 размещаем во 2–4 и 7–9 столбцах трёх нижних строк, промежуток между этими квадратами заполняем тремя горизонтальными доминошками, пустые клетки первого столбца — двумя вертикальными доминошками, и, наконец, 8 пустых клеток четвёртой строки — четырьмя горизонтальными доминошками.

Задача 5. *На доске написаны 55 цифр: одна единица, две двойки, три тройки и т. д., девять девяток, десять нулей. Петя составил из них 25-значное число, а Вася составил 30-значное число из остальных цифр. Может ли произведение этих двух чисел быть числом, состоящим из одних единиц?*

Ответ. Не может. Решение. Произведение 25-значного и 30-значного чисел имеет 54 или 55 знаков. Из 54 единиц наше произведение состоять не может: тогда бы оба сомножителя начинались с единицы, а она у нас только одна. Чтобы показать, что из 55 единиц произведение тоже состоять не может, заметим, что сумма всех наших цифр делится на 3. Поэтому (по признаку равноостаточности при делении на 3) оба слагаемых либо делятся на 3, либо одно дает при делении на 3 остаток 1, а другое — остаток 2. Но в первом случае произведение должно делиться на 3, а во втором — давать при делении на 3 остаток 2, а число из 55 единиц дает при делении на 3 остаток 1.

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. *На прямой отмечено 100 различных точек. Для каждой точки посчитали сумму расстояний от этой точки до всех остальных. Могут ли все 100 полученных чисел быть различными?*

Ответ. Не могут. Решение. Пронумеруем точки в порядке, в котором они лежат на прямой. При переходе от 50-ой точки к 51-ой 50 расстояний уменьшаются на расстояние между 50-ой и 51-ой точками, а 50 — увеличиваются (мы считаем здесь, что расстояние от точки до неё самой равно 0 и приписываем этот 0 к сумме расстояний), поэтому сумма расстояний не меняется. Таким образом, суммы расстояний от 50-ой и 51-ой точек до всех остальных равны.

Задача 2. *В ряд выписана 101 цифра: нули и единицы. Затем для каждой некрайней цифры a выбирается цифра, которая хотя бы дважды встречается среди a и её соседей слева и справа, и эта цифра записывается под a. С полученной строчкой из 99 цифр делается та же операция, и т.д., пока не получится одна цифра. Оказалось, что эта цифра — 1. При каком наименьшем количестве исходных единиц это могло получиться?*

Ответ. 2. Решение. Понятно, что одна единица погибнет после первого же хода. А вот две единицы, расположенные на 50-м и 51-м местах, выживут, даже если на остальных местах будут нули. В самом деле, после каждого хода цепочки нулей с обеих сторон будут укорачиваться на один нуль, а единицы в центре будут сохраняться. После 49-го хода нули справа исчезнут, а слева останется один нуль, и после 50-го хода останется одна единица.

Задача 3. *Числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+(a+b)^2 = c^2+d^2+(c+d)^2$. Докажите, что $a^4+b^4+(a+b)^4 = c^4+d^4+(c+d)^4$.*

Решение. $a^2+b^2+(a+b)^2 = 2(a^2+b^2+ab)$. Поэтому данное в условии равенство равносильно равенству $a^2+b^2+ab = c^2+d^2+cd$. Возводя это равенство в квадрат, получаем

$$a^4+b^4+3(ab)^2+2a^3b+2b^3a = c^4+d^4+3(cd)^2+2c^3d+2d^3c.$$

Осталось заметить, что в последнем равенстве левая часть равна $(a^4+b^4+(a+b)^4)/2$, а правая — $(c^4+d^4+(c+d)^4)/2$.

Задача 4. *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Оказалось, что $AK = CL$ и $\angle ALK+\angle BKL = 60°$. Докажите, что $KL = BC$.*

Решение. Обозначим величину угла BKL через α. Построим вне треугольника ABC треугольник LAT так, чтобы $LT = KL$, а $\angle ALT = \alpha$. В треугольнике KLT $\angle KLT = 60°$ и $LT = KL$, поэтому он — равносторонний. Отсюда $KL = KT$. Далее, $BK = AB-AK = AC-LC = AL$. Следовательно, треугольники ALT и BKL равны по первому признаку, откуда $\angle LAT = \angle KBL$. Обозначим величину угла KBL через β.

Заметим, что из треугольника AKL $\angle BAC = 180°-(180°-\alpha)-(60°-\alpha) = 2\alpha-60°$, откуда $\angle KAT = 2\alpha-60°+\angle LAT = 2\alpha-60°+\beta$ и $\angle ABC = \angle ACB = (180°-\angle BAC)/2 = 120°-\alpha$. Далее, $\angle LBC = 120°-\alpha-\beta$, откуда $\angle BLC = 180°-(120°-\alpha-\beta)-(120°-\alpha) = 2\alpha-60°+\beta = \angle KAT$. Следовательно, треугольники KAT и CLB равны по первому признаку, откуда $KL = KT = BC$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Дано натуральное n. Докажите, что у любых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ существует перестановка $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ такая, что $(b_1-b_2)(b_2-b_3)\ldots(b_n-b_{n+1})$ кратно $n!$.*

Решение. Сопоставим нашим числам точки на плоскости и будем строить n-звенную ломаную, проходящую через все их так, что разность чисел, соединённых её k-ым звеном, делится на $k+1$. Пронумеровав точки в том порядке, в каком через них проходит ломаная, мы, очевидно, получим нужную перестановку.

Среди чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$ найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на n. Соединим их отрезком. Далее будем строить отрезки по индукции. Пусть мы уже построили k отрезков так, что они образовали некоторое количество ломаных. У каждой ломаной отметим все точки, кроме одного из концов, и забудем про отмеченные точки. Поскольку отмеченных точек на каждой ломаной столько же, сколько у неё звеньев, мы отметили k точек. Среди оставшихся $n-k+1$ чисел найдутся два с одинаковыми остатками от деления на $n-k$. Соединим их отрезком. Цикла при этом не образуется, так как у каждой ломаной один из концов забыт. Завершив описанный процесс, получим искомую ломаную. Нескольких ломаных получиться не может, потому что тогда отрезков было бы проведено меньше, чем n.

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. *В ряд выписана 101 цифра: нули и единицы. Затем для каждой некрайней цифры а выбирается цифра, которая хотя бы дважды встречается среди а и её соседей слева и справа, и эта цифра записывается под а. С полученной строчкой из 99 цифр делается та же операция, и т.д., пока не получится одна цифра. Оказалось, что эта цифра — 1. При каком наименьшем количестве исходных единиц это могло получиться?*

Ответ. 2. Решение. Понятно, что одна единица погибнет после первого же хода. А вот две единицы, расположенные на 50-м и 51-м местах, выживут, даже если на остальных местах будут нули. В самом деле, после каждого хода цепочки нулей с обеих сторон будут укорачиваться на один нуль, а единицы в центре будут сохраняться. После 49-го хода нули справа исчезнут, а слева останется один нуль, и после 50-го хода останется одна единица.

Задача 2. *В выпуклом шестиугольнике ABCDEF углы при вершинах B, C, E и F равны, а прямые BC и EF параллельны. Докажите, что AB+AF = CD+DE.*

Решение. Обозначим величины равных углов при вершинах B, C, E и F через α. Пусть прямые BC и DE пересекаются в точке G, а прямые AB и EF — в точке H. Тогда $\angle EGB = 180°-\angle FED = 180°-\angle ABC$, откуда $AB \parallel DE$. Значит, $BHEG$ — параллелограмм, откуда $\angle BHE = 180°-\alpha = \angle AFH$. Таким образом, треугольник FAH — равнобедренный, откуда $BH = BA+AH = BA+AF$. Аналогично, $EG = DE+CD$. Осталось заметить, что отрезки BH и GE равны как противоположные стороны параллелограмма.

Задача 3. *Дано натуральное n. Докажите, что у любых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ существует перестановка $b_1, b_2, \ldots, b_{2n+1}$ такая, что $(b_1-b_2)(b_3-b_4)\ldots(b_{2n-1}-b_{2n})$ кратно $2^n\cdot n!$.*

Решение. Среди чисел $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на $2n$. Примем их за b_1 и b_2. Среди оставшихся $2n-1$ чисел найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на $2n-2$. Примем их за b_3 и b_4. Продолжая построение аналогичным образом, получим перестановку $b_1, b_2, \ldots, b_{2n+1}$ такую, что b_{2k-1} и b_{2k} дают одинаковые остатки при делении на $2(n-k+1)$ при всех k от 1 до n. Очевидно, эта перестановка удовлетворяет условию задачи.

Задача 4. *На столе стоят три стопки дисков. В каждой стопке снизу лежат 11 чёрных дисков, потом 10 белых, потом 9 чёрных, 8 белых, …, 1 чёрный. Аня и Боря по очереди берут диски из стопок. Каждым ходом нужно взять несколько одноцветных дисков с верха одной стопки. Начинает Аня. Проигрывает тот, кто взял последний диск. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Второй. Решение. Пусть второй на каждый ход первого берёт из той же стопки все верхние диски того цвета, который сверху, кроме одного. Исключение составляет случай, когда после хода первого в соответствующей стопке остались диски только одного цвета, и эта стопка — не последняя. В этом случае второй берёт все оставшиеся в этой стопке диски. При такой игре второго первый каждый раз будет вынужден брать один диск, открывая второму (если это был не последний диск на столе) несколько дисков одного цвета, и второй сможет осуществить свою стратегию. Понятно, что, играя так, второй не проиграет. Значит, проиграет первый.

Задача 5. *Вещественные числа a, b и c лежат на промежутке [–2;2]. Какое наибольшее значение может принимать сумма $|a^2-bc+1|+|b^2-ca+1|+|c^2-ab+1|$?*

Ответ. 19. Решение. Если $a, b, c \geq 0$, то перемена знака одного из чисел не уменьшает два слагаемых, где нет квадрата этого числа, и не меняет слагаемое, где этот квадрат есть. Одновременная перемена знака всех трёх чисел не меняет ни одного из слагаемых. Значит, можно, не умаляя общности, считать, что два числа (например, a и b) неотрицательны, а третье — неположительно. Полагая $d = -c$, получаем $0 \leq a, b, d \leq 2$, и сумма из условия равна $|a^2+bd+1|+|b^2+ad+1|+|d^2-ab+1| = a^2+bd+b^2+ad+2+|d^2-ab+1|$. В зависимости от знака выражения d^2-ab+1 эта сумма может равняться $a^2+b^2+d^2+bd+ad-ab+3$ или $a^2+b^2-d^2+bd+ad+ab+1$. Из неравенства о средних $a^2+b^2-d^2+bd+ad+ab+1 \leq 2(a^2+b^2)+1 \leq 2\cdot(2^2+2^2)+1 = 17$. Далее, при фиксированных a и b выражение $a^2+b^2+d^2+bd+ad-ab+3$ максимально, когда $d = 2$, и равняется в этом случае $a^2+b^2-ab+2a+2b+7$ (*). Положим $a = 2-u$, $b = 2-v$. Подставляя эти равенства в выражение (*), после преобразований получаем $19+u^2-4u+v^2-4v-uv = 19+u(u-4)+v(v-4)-uv$. Здесь $u(u-4)+v(v-4)-uv \leq 0$, так как $0 \leq u, v \leq 2$. Поэтому $a^2+b^2-d^2+bd+ad+ab+1 \leq 19$, причём равенство достигается (при $a = b = 2$). Суммируя сказанное, получаем ответ.