

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 20.02.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. На крыльце сидят три мальчика: Петя, Вася и Толя. К ним подошёл прохожий и задал по очереди три вопроса первому мальчику: «Ты — Вася?», «Ты — Петя?», «Ты — Толя?». Затем он задал те же вопросы в том же порядке второму мальчику, затем третьему. Все 9 ответов «Да» и «Нет» чередовались, причём первый был «Да». Кто из мальчиков (первый, второй или третий) Петя, если из полученных ответов ровно два были лживые?
2. На стене замка висит несколько портретов, на каждом из которых изображён один человек. Шерлок Холмс выяснил, что среди людей на этих портретах ровно шестеро являются отцами, ровно шестеро — сыновьями и ровно шестеро — дедами (по мужской линии) других людей на этих портретах. Какое наименьшее количество портретов могло висеть на стене? (У каждого человека ровно один отец и ровно один дед по мужской линии).
3. Каждая клетка квадрата 9×9 покрашена в красный или белый цвет. Назовём клетки *соседками*, если у них ровно одна общая вершина. Докажите, что в таблице найдётся или клетка, у которой ровно четыре соседки, среди которых поровну красных и белых, или клетка, у которой ровно две соседки, и они одного цвета.
4. Назовем 10-значное число *чудесным*, если оно делится на восьмизначное число, получаемое из него вычёркиванием двух средних цифр (т. е. цифр, стоящих на 5 и 6 местах). Сколько существует чудесных чисел?
5. На окружности отмечено 100 точек. Петя красит каждую из них в один из 10 цветов. Потом он проводит все отрезки с одноцветными концами и красит каждый из них в цвет его концов. Вася утверждает, что сможет оставить k отрезков, стерев все остальные, чтобы никакие два оставленных разноцветных отрезка не пересекались. При каком наибольшем k Вася заведомо окажется прав?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 20.02.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. На стене замка висит несколько портретов, на каждом из которых изображён один человек. Шерлок Холмс выяснил, что среди людей на этих портретах ровно десятеро являются дедами и ровно десятеро — внуками других людей на этих портретах. Какое наименьшее количество портретов могло висеть на стене?
2. Найдите все тройки простых чисел, для которых все три их положительные попарные разности также простые.
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Через точку A проведена прямая, перпендикулярная BL , она пересекла отрезок BC в точке D . На луче BA за точкой A отмечена такая точка E , что $AE = CD$. Докажите, что $EL = LC$.
4. Назовем число *хорошим*, если его можно представить в виде $\frac{a}{2} + \frac{b}{5}$, где a и b — целые числа, не меньшие 0 и не большие 100. Найдите сумму всех хороших чисел.
5. Пусть n — нечетное число, большее 10. Каждая клетка таблицы $n \times n$ покрашена в красный или белый цвет. Назовём клетки *соседними*, если у них ровно одна общая вершина. При каких n в таблице найдётся или клетка, с четырьмя соседними, среди которых поровну красных и белых, или клетка, у которой ровно две соседних, причём они одного цвета?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 20.02.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Как провести через данную точку на плоскости 19 прямых таким образом, чтобы для любого натурального $k \leq 90$ нашлись две проведённые прямые, угол между которыми равняется k° ?
2. Каждая клетка квадрата 1001×1001 покрашена или в красный, или в белый цвет. Назовём клетки *соседками*, если у них ровно одна общая вершина. Докажите, что в таблице найдётся или клетка, у которой ровно четыре соседки, среди которых поровну красных и белых, или клетка, у которой ровно две соседки, и они одного цвета.
3. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \dots$ такова, что для каждого натурального n выполнено $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$. Нашлось такое натуральное k , что $a_{2k} = 3a_k$. Найдите a_{46} .
4. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка D . Точка E симметрична точке D относительно прямой AB , точка F симметрична точке E относительно прямой AC . Отрезки FD и AC пересекаются в точке P . Докажите, что $\angle DPC = \angle AED$.
5. Решите в натуральных числах уравнение $14^n - 3^m = 2015$.

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. На крыльце сидят три мальчика: Петя, Вася и Толя. К ним подошёл прохожий и задал по очереди три вопроса первому мальчику: «Ты — Вася?», «Ты — Петя?», «Ты — Толя?». Затем он задал те же вопросы в том же порядке второму мальчику, затем третьему. Все 9 ответов «Да» и «Нет» чередовались, причём первый был «Да». Кто из мальчиков (первый, второй или третий) Петя, если из полученных ответов ровно два были лживые?

Ответ. Второй. **Решение.** И первый, и третий на заданные вопросы дважды ответили «Да». Значит, каждый из них хотя бы раз солгал. Так как лживых ответов было ровно два, второй мальчик на все вопросы отвечал правдиво. «Да» он ответил на вопрос: «Ты — Петя?», значит, он и есть Петя.

Задача 2. На стене замка висит несколько портретов, на каждом из которых изображён один человек. Шерлок Холмс выяснил, что среди людей на этих портретах ровно шестеро являются отцами, ровно шестеро — сыновьями и ровно шестеро — дедами (по мужской линии) других людей на этих портретах. Какое наименьшее количество портретов могло висеть на стене? (У каждого человека ровно один отец и ровно один дед по мужской линии).

Ответ. 8. **Решение.** Оценка. Самый младший из нарисованных не может быть ничьим дедом или отцом, поэтому портретов не меньше семи. Если их ровно семь, то каждый из оставшихся шести должен быть и чьим-то отцом, и чьим-то дедом. Но самый младший из этих шести не может быть ни отцом, ни дедом никому из остальных пяти, а самому младшему из нарисованных не может быть отцом и дедом одновременно. **Пример.** Пусть портреты висят в ряд, второй — внук первого, а каждый, начиная с третьего — сын предыдущего.

Задача 3. Каждая клетка квадрата 9×9 покрашена в красный или белый цвет. Назовём клетки **соседками**, если у них ровно одна общая вершина. Докажите, что в таблице найдётся или клетка, у которой ровно четыре соседки, среди которых поровну красных и белых, или клетка, у которой ровно две соседки, и они одного цвета.

Решение. Пронумеруем строки слева направо и столбцы снизу вверх числами от 1 до 9 и назовём **отмеченными** клетки с четной суммой номеров их строки и столбца. Заметим, что все соседки отмеченной клетки — отмеченные.

Предположим, нашлась раскраска, для которой утверждение задачи неверно. В первой строке у всех отмеченных клеток, кроме угловых, по две соседки. Они должны быть разноцветными. Поэтому цвета отмеченных клеток во второй строке чередуются. Так как ни у какой из отмеченных клеток третьей строки нет двух красных и двух белых соседей, все отмеченные клетки четвертой строки должны быть покрашены в один цвет.

Вернемся ко второй строке. Первая её отмеченная клетка (A) лежит во втором столбце, а последняя (B) — в восьмом. Между ними две отмеченные клетки, поэтому клетки A и B покрашены в разные цвета. Но, поскольку все отмеченные клетки четвёртой строки одноцветные, это означает, что либо у первой, либо у последней клетки третьей строки две одноцветные соседки (и других соседей, очевидно, нет).

Задача 4. Назовем 10-значное число **чудесным**, если оно делится на восьмизначное число, получаемое из него вычеркиванием двух средних цифр (т. е. цифр, стоящих на 5 и 6 местах). Сколько существует чудесных чисел?

Ответ. 9000. **Решение.** Пусть x — чудесное число, а число y получается из него вычеркиванием двух средних цифр. Рассмотрим разность $x - 100y$, если она неотрицательна, и разность $100y - x$ в противном случае. Так как первые четыре цифры у вычитаемого и уменьшаемого совпадают, эта разность имеет не больше шести знаков. Но она должна делиться на восьмизначное число y . Поэтому она равна 0, то есть $x = 100y$. Значит, x оканчивается на два нуля. Но тогда $100y$, у которого третья и четвертая с конца цифры такие же, как последняя и предпоследняя у числа x , оканчивается на четыре нуля. Значит, и x оканчивается на четыре нуля. Но тогда $100y$, а, значит, и x оканчивается на 6 нулей.

Итак, все чудесные числа оканчиваются на 6 нулей. С другой стороны, легко видеть, что все числа, оканчивающиеся на 6 нулей, чудесные. Таких чисел столько же, сколько различных четырёхзначных чисел (получающихся после удаления шести нулей), то есть 9000.

Задача 5. На окружности отмечено 100 точек. Петя красит каждую из них в один из 10 цветов. Потом он проводит все отрезки с одноцветными концами и красит каждый из них в цвет его концов. Вася утверждает, что сможет оставить k отрезков, стерев все остальные, чтобы никакие два оставленных разноцветных отрезка не пересекались. При каком наибольшем k Вася заведомо окажется прав?

Ответ. При $k = 45$. **Решение.** **Пример.** Точек какого-то цвета будет хотя бы 10. Отрезков этого цвета будет хотя бы $10 \cdot 9 / 2 = 45$. Их и оставим. **Оценка.** Покрасим десять идущих подряд точек в 10 разных цветов, дальше будем повторять эту раскраску по кругу. Получим 10 групп из 10 разноцветных точек каждая. Заметим, что при такой раскраске два разноцветных отрезка, соединяющие точки одних и тех же двух групп, пересекаются. Поэтому Вася не может оставить больше одного отрезка, соединяющего точки двух данных групп. Но из 10 групп можно составить только 45 различных пар, поэтому при такой раскраске Вася больше 45 отрезков оставить не сможет.

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. На стене замка висит несколько портретов, на каждом из которых изображён один человек. Шерлок Холмс выяснил, что среди людей на этих портретах ровно десятеро являются дедами и ровно десятеро — внуками других людей на этих портретах. Какое наименьшее количество портретов могло висеть на стене?

Ответ. 11. Решение. Пример: 11 портретов в ряд, где на каждом следующем изображён внук того, кто изображён на предыдущем. Оценка. Самый старший из изображённых не может быть внуком кого-либо из изображённых, поэтому кроме его портрета должно быть ещё хотя бы 10.

Задача 2. Найдите все тройки простых чисел, для которых все три их положительные попарные разности также простые.

Ответ. (2, 5, 7). Решение. Одно из чисел должно быть двойкой (иначе есть чётная разность, большая 2), а два других нечётны и потому должны отличаться на 2. Итак, все искомые тройки имеют вид (2, p , $p+2$). Тогда число $p-2$ тоже должно быть простым. Но числа $p-2$, p , $p+2$ дают различные остатки при делении на 3, поэтому одно из них должно делиться на 3. Единственный подходящий вариант — $p-2 = 3$, откуда и получаем ответ.

Задача 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Через точку A проведена прямая, перпендикулярная BL , она пересекла отрезок BC в точке D . На луче BA за точкой A отмечена такая точка E , что $AE = CD$. Докажите, что $EL = LC$.

Решение. Так как в треугольнике ABD биссектриса из вершины B является высотой, $BA = BD$, откуда $BE = BA + AE = BD + DC = BC$. Таким образом, треугольник EBC — тоже равнобедренный. Поэтому прямая BL — срединный перпендикуляр к отрезку EC , откуда $EL = LC$.

Задача 4. Назовем число *хорошим*, если его можно представить в виде $\frac{a}{2} + \frac{b}{5}$, где a и b — целые числа, не меньшие 0 и не большие 100. Найдите сумму всех хороших чисел.

Ответ. $35 \cdot 697 = 24395$. Решение. Так как $a/2 + b/5 = (5a+2b)/10$, достаточно найти сумму всех чисел, представимых в виде $5a+2b$ (назовём их *отличными*), $a, b = 0, 1, \dots, 100$, и поделить ее на 10. Покажем, что отличными являются все целые числа от 0 до 700, кроме чисел 1, 3, 697 и 699, откуда и будет следовать ответ. Поскольку вместе с числом $n = 5a+2b$ отличным является и число $700-n = 5 \cdot (100-a) + 2 \cdot (100-b)$, достаточно показать, что отличными являются все целые числа от 4 до 350. Все четные числа от 2 до 20 можно получить как $5 \cdot 0 + 2b$, где $1 \leq b \leq 10$. Все нечетные числа от 5 до 25 можно получить как $5 \cdot 1 + 2b$, где $1 \leq b \leq 10$. Таким образом, можно представить в виде $5a+2b$ все числа от 10 до 20, причём $a, b \leq 10$. Теперь возьмём любое целое число n , не большее 350, и вычтем из него число $10c$, кратное 10, так, чтобы получилось число, не большее 20 и не меньшее 10. Очевидно, $c \leq 34$. По доказанному $n-10c = 5a+2b$, откуда $n = 5(a+2c) + 2b$, где $5+2c < 10+68 = 78$. Итак, все числа от 4 до 350 действительно отличные.

Задача 5. Пусть n — нечетное число, большее 10. Каждая клетка таблицы $n \times n$ покрашена в красный или белый цвет. Назовём клетки *соседними*, если у них ровно одна общая вершина. При каких n в таблице найдётся или клетка, с четырьмя соседними, среди которых поровну красных и белых, или клетка, у которой ровно две соседних, причём они одного цвета?

Ответ. При всех n , дающих остаток 1 при делении на 4.

Решение. Случай $n = 4k+1$. Пронумеруем строки слева направо и столбцы снизу вверх числами от 1 до $4k+1$ и назовём *отмеченными* клетки с четной суммой номеров их строки и столбца. Заметим, что все соседки отмеченной клетки — отмеченные.

Пусть нашлась раскраска, для которой утверждение задачи неверно. В первой строке у всех отмеченных клеток, кроме угловых, по две соседки. Они должны быть разноцветными. Поэтому цвета отмеченных клеток во второй строке чередуются. Так как ни у какой из отмеченных клеток третьей строки нет двух красных и двух белых соседей, все отмеченные клетки четвертой строки должны быть покрашены в один цвет.

Вернемся ко второй строке. Первая её отмеченная клетка (A) лежит во втором столбце, а последняя (B) — в $4k$ -ом. Так как между A и B чётное число ($2k-2$) отмеченных клеток, клетки A и B покрашены в разные цвета. Но, поскольку все клетки отмеченные четвёртой строки одноцветные, это означает, что либо у первой, либо у последней клетки третьей строки две одноцветные соседки (и других соседей, очевидно, нет).

Случай $n = 4k+3$. Опишем раскраску, для которой утверждение задачи неверно. Выделим квадрат $(4k+2) \times (4k+2)$ на пересечении первых $4k+2$ строк и $4k+2$ столбцов, разделим его на квадраты 2×2 . Координатами квадрата 2×2 назовем количество квадратов 2×2 между ним и левой стороной квадрата и между ним и нижней стороной квадрата соответственно. Покрасим в красный цвет квадраты, обе координаты которых нечётные, остальные клетки покрасим в белый цвет.

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. Как провести через данную точку на плоскости 19 прямых таким образом, чтобы для любого натурального $k \leq 90$ нашлись две проведённые прямые, угол между которыми равняется k° ?

Решение. Проведем 10 прямых с углами по 10° между соседними прямыми, а после последней из этих 10 прямых — 9 прямых с углами по 1° между соседними прямыми. Получим 9 идущих подряд углов по 10° , а за ними — 9 идущих подряд углов по 1° . Угол в $\overline{ab}^\circ$ получится, если взять a последних углов по 10° и b первых углов по 1° .

Задача 2. Каждая клетка квадрата 1001×1001 покрашена или в красный, или в белый цвет. Назовём клетки соседками, если у них ровно одна общая вершина. Докажите, что в таблице найдётся или клетка, у которой ровно четыре соседки, среди которых поровну красных и белых, или клетка, у которой ровно две соседки, и они одного цвета.

Решение. Пронумеруем строки слева направо и столбцы снизу вверх числами от 1 до 1001 и назовём отмеченными клетки с четной суммой номеров их строки и столбца. Заметим, что все соседки отмеченной клетки — отмеченные.

Предположим, нашлась раскраска, для которой утверждение задачи неверно. В первой строке у всех отмеченных клеток, кроме угловых, по две соседки. Они должны быть разноцветными. Поэтому цвета отмеченных клеток во второй строке чередуются. Так как ни у какой из отмеченных клеток третьей строки нет двух красных и двух белых соседей, все отмеченные клетки четвертой строки должны быть покрашены в один цвет.

Вернемся ко второй строке. Первая её отмеченная клетка (A) лежит во втором столбце, а последняя (B) — в тысячном. Так как между A и B чётное число (498) отмеченных клеток, клетки A и B покрашены в разные цвета. Но, поскольку все отмеченные клетки четвёртой строки одноцветные, это означает, что либо у первой, либо у последней клетки третьей строки две одноцветные соседки (и других соседей, очевидно, нет).

Задача 3. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \dots$ такова, что для каждого натурального n выполнено $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$. Нашлось такое натуральное k , что $a_{2k} = 3a_k$. Найдите a_{46} .

Ответ. $a_{46} = \frac{19}{2\sqrt{2}}$. **Решение.** Заметим, что $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1$. Поэтому $a_{2k}^2 = 9a_k^2 = a_k^2 + k$, откуда $8a_k^2 = k = 8a_1^2 + 8k - 8 \Leftrightarrow 8a_1^2 = 8 - 7k$. Отсюда $k \leq 1 \Leftrightarrow k = 1$, и $a_1^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow a_{46}^2 = a_1^2 + 45 = \frac{361}{8}$, откуда и получаем ответ.

Задача 4. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка D . Точка E симметрична точке D относительно прямой AB , точка F симметрична точке E относительно прямой AC . Отрезки FD и AC пересекаются в точке P . Докажите, что $\angle DPC = \angle AED$.

Решение. Пусть ED пересекается с AD в точке G , а EF с AC — в точке H . Так как углы AGE и AHE прямые, точки A, E, G и H лежат на одной окружности Ω . Далее, $GH \parallel DF$ как средняя линия треугольника DEF . Поэтому $\angle DPC = \angle GHC$, и достаточно доказать, что $\angle GHC = \angle AED$. Если точка H лежит на отрезке AC , то $\angle AED = 180^\circ - \angle AHG = \angle GHC$, и все доказано. В противном случае точка H лежит на продолжении отрезка AC за вершину A , и углы GHC и AED равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AG окружности Ω .

Задача 5. Решите в натуральных числах уравнение $14^n - 3^m = 2015$.

Ответ. $n = 3, m = 6$. **Решение.** 14 делится на 7, а 2015 при делении на 7 дает остаток 6. Поэтому 3^m также должно при делении на 7 давать остаток 6. Нетрудно убедиться, что в этом случае m делится на 3.

3^{3k} делится на 9, а 2015 дает при делении на 9 остаток 8. Поэтому 14^n также должно при делении на 9 давать остаток 8. Нетрудно убедиться, что в этом случае n делится на 3.

Итак, $m = 3k, n = 3l$, и мы имеем уравнение $14^{3l} - 3^{3k} = 2015 \Leftrightarrow (14^l - 3^k)(14^{2l} + 14^l 3^k + 3^{2k}) = 2015$. Так как $14^3 > 2015$, из второй скобки левой части $l = 1$. Тогда из первой скобки $k = 1$ или $k = 2$. $k = 1$ не годится, так как 2015 не делится на 11, а $k = 2$ дает ответ.