МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке таблицы $n\times n$ написано одно из чисел 0, 1 или –1 так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одно число 1 и ровно одно число –1. Разрешается поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице заменились на противоположные.

2. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представимо в виде суммы трёх натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a. Найдите наибольшее нехорошее число.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ с $AD > BC$ точки E и F суть середины AB и CD соответственно. Прямые AD и BC пересекают продолжение FE в точках H и G соответственно. Докажите, что $\angle AHE < \angle BGE$.

4. Обозначим через $d(X, YZ)$ обозначает расстояние от точки X до прямой YZ. Точка P внутри треугольника ABC такова, что отношения $d(A, BC)/d(P, BC)$, $d(B, CA)/d(P, CA)$ и $d(C, AB)/d(P, AB)$ равны. Найдите их значение.

5. Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение $\dfrac{a+1}{a(a+2)}+\dfrac{b+1}{b(b+2)}+\dfrac{c+1}{c(c+2)}$ при положительных a, b, c таких, что $a+b+c \le 3$.

6. Вершины правильного 1526-угольника суть точки P_1, P_2, …, P_{1526} в некотором порядке. Докажите, что у ломаной $P_1P_2P_3\ldots P_{1526}P_1$ есть два параллельных звена.

7. Бесконечная в обе стороны последовательность …, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, … удовлетворяет условию $a_{n+2} = (a_n+a_{n+1})/2$ при всех целых n. Докажите, что если эта последовательность ограничена (то есть существует M такое, что $|a_n| < M$ при всех целых n), то все её члены равны.

8. 1526 монет выложены по кругу гербом вверх. Разрешается перевернуть четыре монеты, либо лежащие подряд, либо занимающие 4 из пяти последовательных мест, кроме среднего. Можно ли с помощью таких операций повернуть все монеты решкой вверх?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В детском саду есть 2014 мячиков 106 различных цветов, по 19 мячиков каждого цвета. При каком наименьшем n для любой расстановки мячиков по кругу найдутся n последовательных мячиков по крайней мере 53 различных цветов?

2. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представимо в виде суммы трёх натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a. Найдите наибольшее нехорошее число.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ с $AD > BC$ точки E и F суть середины AB и CD соответственно. Прямые AD и BC пересекают продолжение FE в точках H и G соответственно. Докажите, что $\angle AHE < \angle BGE$.

4. Обозначим через $d(X, YZ)$ обозначает расстояние от точки X до прямой YZ. Точка P внутри треугольника ABC такова, что отношения $d(A, BC)/d(P, BC)$, $d(B, CA)/d(P, CA)$ и $d(C, AB)/d(P, AB)$ равны. Найдите их значение.

5. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство $128(a+b+c+d+2) < (5+a^2)(5+b^2)(5+c^2)(5+d^2)$.

6. Вершины правильного 1526-угольника суть точки P_1, P_2, …, P_{1526} в некотором порядке. Докажите, что у ломаной $P_1P_2P_3\dots P_{1526}P_1$ есть два параллельных звена.

7. Бесконечная в обе стороны последовательность …, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, … удовлетворяет условию $a_{n+2} = (a_n+a_{n+1})/2$ при всех целых n. Докажите, что если эта последовательность ограничена (то есть существует M такое, что $|a_n| < M$ при всех целых n), то все её члены равны.

8. 1526 монет выложены по кругу гербом вверх. Разрешается перевернуть четыре монеты, либо лежащие подряд, либо занимающие 4 из пяти последовательных мест, кроме среднего. Можно ли с помощью таких операций повернуть все монеты решкой вверх?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В детском саду есть 2014 мячиков 106 различных цветов, по 19 мячиков каждого цвета. При каком наименьшем n для любой расстановки мячиков по кругу найдутся n последовательных мячиков по крайней мере 53 различных цветов?

2. Докажите, что каждое натуральное число, большее 2015, можно представить в виде суммы трёх натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, I — точка их пересечения. Известно, что $AI = BC$ и $\angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите углы треугольника.

4. Обозначим через $d(X, YZ)$ обозначает расстояние от точки X до прямой YZ. Точка P внутри треугольника ABC такова, что отношения $d(A, BC)/d(P, BC)$, $d(B, CA)/d(P, CA)$ и $d(C, AB)/d(P, AB)$ равны. Найдите их значение.

5. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $8(a+b+2) < (5+a^2)(5+b^2)$.

6. Вершины правильного 1526-угольника суть точки P_1, P_2, …, P_{1526} в некотором порядке. Докажите, что у ломаной $P_1P_2P_3\ldots P_{1526}P_1$ есть два параллельных звена.

7. Вася написал на доске два разных натуральных числа. Каждую минуту он дописывает на доску полусумму двух чисел, написанных на доске последними. Докажите, что скорее рано, чем поздно на доске появится нецелое число.

8. 1526 монет выложены по кругу гербом вверх. Разрешается перевернуть четыре монеты, либо лежащие подряд, либо занимающие 4 из пяти последовательных мест, кроме среднего. Можно ли с помощью таких операций повернуть все монеты решкой вверх?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n число $4^n+6^n+9^n$ является точным квадратом?

2. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

3. В детском саду есть 2014 мячиков 106 различных цветов, по 19 мячиков каждого цвета. При каком наименьшем n для любой расстановки мячиков по кругу найдутся n последовательных мячиков по крайней мере 53 различных цветов?

4. В ряд выписано 1000 натуральных чисел. Произведение любых двух соседних — куб натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — куб натурального числа.

5. В кружок поступило 40 детей. Оказалось, что среди любых четверых из них есть кто-то, кто знает ещё хотя бы двоих из этой четвёрки. Кружковцы Петя и Вася незнакомы и не имеют общего знакомого; Вася знаком с кружковцем Колей. Учитель выгнал Петю из кружка. Докажите, что любые двое оставшихся либо знакомы, либо имеют общего знакомого, отличного от Пети.

6. При каком наибольшем n в таблицу из пяти строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

7. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство $128(a+b+c+d) < (4+a^2)(4+b^2)(4+c^2)(4+d^2)$

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, I — точка их пересечения. Известно, что $AI = BC$ и $\angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите углы треугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n число $4^n+6^n+9^n$ является точным квадратом?

2. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

3. В детском саду есть 2000 мячиков 100 различных цветов, по 20 мячиков каждого цвета. Мячики разложены по кругу. Докажите, что можно выбрать 979 последовательных мячиков, среди которых есть мячики по крайней мере 50 различных цветов.

4. В ряд выписано 1000 натуральных чисел. Произведение любых двух соседних — куб натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — куб натурального числа.

5. В стране 100 городов. Каждый город соединен дорогой хотя бы с одним другим городом. Оказалось, что из любых четырех городов можно выбрать такой, который соединен дорогами хотя бы с двумя другими городами из этой четверки. Докажите, что между любыми двумя городами есть путь не более чем из трех дорог.

6. При каком наибольшем n в таблицу из пяти строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

7. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство $128(a+b+c+d) < (4+a^2)(4+b^2)(4+c^2)(4+d^2)$

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, I — точка их пересечения. Известно, что $AI = BC$ и $\angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите углы треугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа x и y и простое число p таковы, что $x^2–3xy+p^2y^2 = 12p$. Найдите p.

2. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

3. В детском саду есть 2000 мячиков 100 различных цветов, по 20 мячиков каждого цвета. Мячики разложены по кругу. Докажите, что можно выбрать 980 последовательных мячиков, среди которых есть мячики по крайней мере 50 различных цветов.

4. В ряд выписано несколько натуральных чисел. Произведение любых двух соседних — квадрат натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — квадрат натурального числа.

5. Из пункта А в пункт Б выехали одновременно велосипедист и мотоциклист. Когда велосипедист проехал 15 км, мотоциклист был уже на полпути от велосипедиста до Б. А когда велосипедист проехал 20 км, мотоциклист как раз прибыл в Б. Найдите расстояние между пунктами А и Б.

6. При каком наибольшем n в таблицу из четырёх строк и n столбцов можно вписать числа 0 или 1 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

7. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $8(a+b) < (4+a^2)(4+b^2)$

8. На доске написано восемь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11. Докажите, что среди этих чисел есть большее 150.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Вася задумал четыре различных натуральных числа и записал на доске (в каком-то порядке) все шесть их попарных сумм, после чего самую большую из них стёр. Всегда ли Петя, взглянув на оставшиеся пять сумм, сможет восстановить стёртую сумму?

2. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

3. В детском саду есть 2000 мячиков 100 различных цветов, по 20 мячиков каждого цвета. Мячики разложены по кругу. Докажите, что можно выбрать 980 последовательных мячиков, среди которых есть мячики по крайней мере 50 различных цветов.

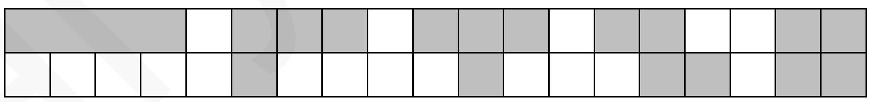
4. В ряд выписано четыре натуральных числа. Произведение любых двух соседних — квадрат натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — квадрат натурального числа.

5. Из пункта А в пункт Б выехали одновременно велосипедист и мотоциклист. Когда велосипедист проехал 15 км, мотоциклист был уже на полпути от велосипедиста до Б. А когда велосипедист проехал 20 км, мотоциклист как раз прибыл в Б. Найдите расстояние между пунктами А и Б.

6. При каком наибольшем n в таблицу из четырёх строк и n столбцов можно вписать числа 0 или 1 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

7. На доске написано восемь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11. Докажите, что среди этих чисел есть большее 150.

8. Можно ли из пяти нарисованных на чертеже фигурок сложить прямоугольник 4×5?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вася задумал четыре различных натуральных числа и записал на доске (в каком-то порядке) все шесть их попарных сумм, после чего одну из них стёр. Всегда ли Петя, взглянув на оставшиеся пять сумм, сможет восстановить стёртую сумму?

2. В ряд стоят 100 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых двух чисел, стоящих подряд, является квадратом натурального числа. Докажите, что произведение первого и последнего из этих чисел тоже является квадратом натурального числа.

3. В начале в углу доски 9×9 стоит конь. Гроссмейстеры Магнус и Володя по очереди (начинает Магнус) ходят этим конём. Запрещается ходить на клетку, с которой предыдущим ходом сходил соперник. Докажите, что Володя может играть так, чтобы конь не побывал по крайней мере на 45 клетках.

4. На доске написано семь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11 и ровно пять на 13. Докажите, что среди этих чисел есть большее 1000.

5. При каком наибольшем n в таблицу $5\times n$ можно вписать числа 0, 1, 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех n столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

6. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

7. В первый класс поступили 30 детей. Оказалось, что среди любых четверых из них есть кто-то, кто знает ещё хотя бы двоих из этой четвёрки. Группу детей назовём *правильной*, если любые двое из этой группы или знакомы между собой, или имеют общего знакомого. Докажите, что или этот первый класс является правильной группой, или можно удалить из него одного ученика таким образом, что оставшиеся 29 детей образуют правильную группу.

8. В детском саду есть 200 мячиков 20 различных цветов, по 10 мячиков каждого цвета. При каком наименьшем n для любой расстановки мячиков по кругу можно выбрать n последовательных мячиков, которые покрашены по крайней мере в 10 различных цветов?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Вася задумал четыре различных натуральных числа и записал на доске (в каком-то порядке) все шесть их попарных сумм, после чего одну из них стёр. Всегда ли Петя, взглянув на оставшиеся пять сумм, сможет восстановить стёртую сумму?

2. В ряд стоят 100 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых двух чисел, стоящих подряд, является квадратом натурального числа. Докажите, что произведение первого и последнего из этих чисел тоже является квадратом натурального числа.

3. В начале в углу доски 9×9 стоит конь. Гроссмейстеры Магнус и Володя по очереди (начинает Магнус) ходят этим конём. Запрещается ходить на клетку, с которой предыдущим ходом сходил соперник. Докажите, что Володя может играть так, чтобы конь не побывал по крайней мере на 36 клетках.

4. На доске написано семь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11 и ровно пять на 13. Докажите, что среди этих чисел есть большее 1000.

5. При каком наибольшем n в таблицу $5\times n$ можно вписать числа 0, 1, 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех n столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

6. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

7. В стране 100 городов, каждый город соединен дорогой хотя бы с одним другим городом. Оказалось, что из любых четырех городов можно выбрать город, соединенный дорогами хотя бы с двумя другими городами из этой четверки. Докажите, что между любыми двумя городами есть путь не более, чем из трех дорог.

8. В детском саду есть 100 мячиков 10 различных цветов, по 10 мячиков каждого цвета. Мячики разложены по кругу. Докажите, что можно выбрать 40 последовательных мячиков, которые покрашены по крайней мере в 5 различных цветов.

XLVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЕКАТЕРИНБУРГ, 28.11–04.12.2015

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Вася задумал 5 различных чисел и записал на доске (в каком-то порядке) все 10 их попарных сумм. Всегда ли Петя, взглянув на эти суммы, сможет восстановить исходные числа?

2. Каждое из произведений ab и bc натуральных чисел является квадратом натурального числа. Докажите, что произведение ac — тоже квадрат натурального числа.

3. В начале в углу доски 9×9 стоит конь. Гроссмейстеры Магнус и Володя по очереди (начинает Магнус) ходят этим конём. Запрещается ходить на клетку, с которой предыдущим ходом сходил соперник. Докажите, что Володя может играть так, чтобы конь **не** побывал по крайней мере на 15 клетках.

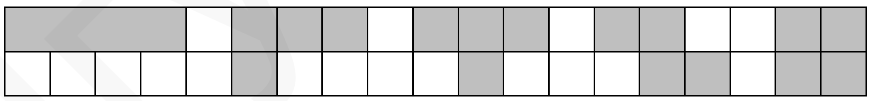
4. На доске написано восемь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11. Докажите, что среди этих чисел есть большее 150.

5. При каком наибольшем n в таблицу из трёх строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

6. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

7. Из пункта А в пункт Б выехали одновременно велосипедист и мотоциклист. Когда велосипедист проехал 15 км, мотоциклист был уже на полпути от велосипедиста до Б. А когда велосипедист проехал 20 км, мотоциклист как раз прибыл в Б. Найдите расстояние между пунктами А и Б.

8. Можно ли из пяти нарисованных на чертеже фигурок сложить прямоугольник 4×5?

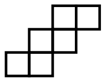
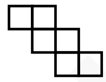


МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC с острыми углами B и C проведена высота AD. Биссектрисы острых углов B и C треугольника ABC пересекают высоту AD в точках E и F соответственно. Докажите, что если $BE = CF$, то треугольник ABC равнобедренный.

2. Целые числа x и y таковы, что $x^2–2xy+y^2–5x+7y$ и $x^2–3xy+2y^2+x–y$ делятся на 17. Докажите, что $xy–12x+15y$ также делится на 17.

3. *Аскентум* — это фигура  , а *дескентум* — фигура  . Поворачивать и переворачивать аскентумы и дескентумы запрещено. Из 2017 аскентумов и n дескентумов собрали некоторую клетчатую фигуру. Может ли оказаться, что эта фигура разбивается на 2015 аскентумов и n+2 дескентума?

4. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

5. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y \le 1$. Докажите, что $12xy \le 4x(1–y)+9y(1–x)$.

6. Дано бесконечное множество натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное подмножество чисел таких, что как сумма любых 2015, так и сумма любых 2017 выбранных чисел будет составным числом. (Напоминаем, что в множестве все элементы должны быть различны).

7. Даны $4n$ натуральных чисел ($n > 10$), не превосходящих $6n$ (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел a и b таких, что a делится на b, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

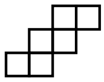
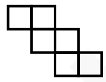
8. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC с острыми углами B и C проведена высота AD. Биссектрисы острых углов B и C треугольника ABC пересекают высоту AD в точках E и F соответственно. Докажите, что если $BE = CF$, то треугольник ABC равнобедренный.

2. Целые числа x и y таковы, что $x^2–2xy+y^2–5x+7y$ и $x^2–3xy+2y^2+x–y$ делятся на 17. Докажите, что $xy–12x+15y$ также делится на 17.

3. *Аскентум* — это фигура  , а *дескентум* — фигура  . Поворачивать и переворачивать аскентумы и дескентумы запрещено. Существует ли на клетчатой плоскости фигура, которая разбивается как на 1968 аскентумов, так и на 1968 дескентумов?

4. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

5. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y \le 1$. Докажите, что $12xy \le 4x(1–y)+9y(1–x)$.

6. Дан бесконечный набор различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное количество чисел так, чтобы сумма любых 2015 выбранных чисел была составным числом.

7. Даны $4n$ натуральных чисел ($n > 10$), не превосходящих $6n$ (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел a и b таких, что a делится на b, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

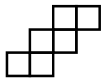
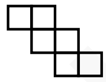
8. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

2. Целые числа x и y таковы, что $x^2–2xy+y^2–5x+7y$ и $x^2–3xy+2y^2+x–y$ делятся на 17. Докажите, что $xy–12x+15y$ также делится на 17.

3. *Аскентум* — это фигура , а *дескентум* — фигура . Поворачивать и переворачивать аскентумы и дескентумы запрещено. Существует ли на клетчатой плоскости фигура, которая разбивается как на 999 аскентумов, так и на 999 дескентумов?

4. В тупоугольном треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Точка M симметрична точке A относительно точки C, а прямая AB пересекает серединный перпендикуляр к AM в точке P. Оказалось, что прямая PM перпендикулярна BC. Докажите, что треугольник APM равносторонний.

5. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y \le 1$. Докажите, что $8xy \le 5x(1–x)+5y(1–y)$.

6. Дан набор из 1526 различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать 300 чисел так, чтобы сумма любых пяти выбранных чисел была составным числом.

7. Решите уравнение $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}}} = \dfrac{x}{36}$.

8. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Даны $4n$ натуральных чисел ($n > 10$), не превосходящих $6n$ (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел a и b таких, что a делится на b, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

2. Вася выписывает на доску в порядке возрастания все числа, являющиеся степенями тройки, а также суммами различных степеней тройки: 1; 3; 4; 9; 10; 12; 13; 27; 28; 30; 31, … . Какое число у Васи на 2050 месте?

3. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых xy^2+7 делится на x^2y+x.

4. В квадрате 11×11 отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

5. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел?

6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

7. Найдите наименьшее натуральное a, для которого неравенство $(n!)^2\cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дан бесконечный набор различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное количество чисел так, чтобы сумма любых 2015 выбранных чисел была составным числом и сумма любых 2017 выбранных чисел была составным числом.

2. Школьник написал олимпиаду из 5 задач и за каждую получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, и руководитель хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а школьник отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. Как за 15 вопросов отгадать баллы школьника?

3. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых xy^2+7 делится на x^2y+x.

4. В квадрате 11×11 отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

5. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел?

6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

7. Найдите наименьшее натуральное a, для которого неравенство $(n!)^2\cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан бесконечный набор различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное количество чисел так, чтобы сумма любых 2015 выбранных чисел была составным числом.

2. Школьник написал олимпиаду из 5 задач и за каждую получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, и руководитель хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а школьник отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. Как за 15 вопросов отгадать баллы школьника?

3. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых xy^2+7 делится на x^2y+x.

4. Клетки доски 9×9 раскрашены в два цвета так, что в любом уголке из 3 клеток есть клетки обоих цветов. Оказалось, что цвет трёх угловых клеток доски — чёрный. Докажите, что четвёртая угловая клетка — тоже чёрная.

5. По кругу расставлены 17 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

6. На доске написаны числа 2,3, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. В частности, проигрывает оставивший одно число. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Докажите неравенство $3^{3000}\cdot(1000!)^3 > 3000!$ ($n!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n: $n! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$).

8. Пять игроков баскетбольной команды SUPER–MEGA–DREAM–TEAM на протяжении всего матча разное число раз попадали в корзину и набрали различное количество очков. При этом чем меньше игрок раз попал в кольцо, тем больше очков он заработал. Какое наименьшее число очков могла заработать команда за матч? Подразумевается, что за каждый бросок можно заработать 2 или 3 очка.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дан набор из 1000 различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать 100 чисел так, чтобы сумма любых девяти выбранных чисел была составным числом.

2. Школьник написал олимпиаду из 5 задач и за каждую получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, и руководитель хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а школьник отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. Как за 15 вопросов отгадать баллы школьника?

3. Найдите наименьшее число, состоящее из четырёх единиц, четырёх двоек и четырёх троек, которое делится на 4.

4. В клетки таблицы 3×3 расставлены натуральные числа. Оказалось, что все шесть сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каким может быть наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

5. По кругу расставлены 17 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

6. Клетки доски 8×8 раскрашены в черный и белый цвета так, что в любом уголке из 3 клеток есть клетки обоих цветов. Сколько клеток черного цвета может оказаться?

7. Докажите неравенство $2^{2000}\cdot(1000!)^2 > 2000!$ ($n!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n: $n! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$).

8. Пять игроков баскетбольной команды SUPER–MEGA–DREAM–TEAM на протяжении всего матча разное число раз попадали в корзину и набрали различное количество очков. При этом чем меньше игрок раз попал в кольцо, тем больше очков он заработал. Какое наименьшее число очков могла заработать команда за матч? Подразумевается, что за каждый бросок можно заработать 2 или 3 очка.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В поезде 50 вагонов. В нём едут два контролёра и несколько "зайцев". Контролёр ловит "зайца", если в какой-то момент оказывается с ним в одном вагоне. Пока поезд едет между станциями, каждый контролёр проверяет один вагон. На остановке каждый "заяц" может выскочить из вагона и перебежать в другой, но не далее, чем через два вагона в третий, после чего каждый из контролёров переходит в соседний вагон (в любую сторону). Новых "зайцев" на остановках не входит. Докажите, что если поезд делает 100 остановок, то за это время контролёры могут действовать так, что переловят всех "зайцев", независимо от того, в каких вагонах изначально оказались контролёры и "зайцы".

2. Найдите наименьшее число, состоящее из четырёх единиц, четырёх двоек, четырёх троек и четырёх четвёрок, которое делится на 16.

3. В квадрате 11×11 отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

4. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел?

5. В клетки таблицы 3×3 расставлены натуральные числа. Оказалось, что все шесть сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каково наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

7. Даны $4n$ натуральных чисел ($n > 10$), не превосходящих $6n$ (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел a и b таких, что a делится на b, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

8. Дано бесконечное множество натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное подмножество чисел таких, что как сумма любых 2015, так и сумма любых 2017 выбранных чисел будет составным числом. (Напоминаем, что в множестве все элементы должны быть различны).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В поезде 50 вагонов. В нём едут два контролёра и несколько "зайцев". Контролёр ловит "зайца", если в какой–то момент оказывается с ним в одном вагоне. Пока поезд едет между станциями, каждый контролёр проверяет один вагон. На остановке каждый "заяц" может выскочить из вагона и перебежать в другой, но не далее, чем через два вагона в третий, после чего каждый из контролёров переходит в соседний вагон (в любую сторону). Новых "зайцев" на остановках не входит. Докажите, что если поезд делает 100 остановок, то за это время контролёры могут действовать так, что переловят всех "зайцев", независимо от того, в каких вагонах изначально оказались контролёры и "зайцы".

2. Найдите наименьшее число, состоящее из трёх единиц, трёх двоек, трёх троек и трёх четвёрок, которое делится на 8.

3. В квадрате 11×11 отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

4. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

5. В клетки таблицы 3×3 расставлены натуральные числа. Оказалось, что все 6 сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каково наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

7. Пять игроков баскетбольной команды SUPER–MEGA–DREAM–TEAM на протяжении всего матча разное число раз попадали в корзину и набрали различное количество очков. При этом чем меньше игрок раз попал в кольцо, тем больше очков он заработал. Какое наименьшее число очков могла заработать команда за матч? Подразумевается, что за каждый бросок можно заработать 2 или 3 очка.

8. Дано множество из 10000 натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать 100 чисел так, что как сумма любых пяти, так и сумма любых семи выбранных чисел будет составным числом. (Напоминаем, что в множестве все элементы должны быть различны).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В поезде 50 вагонов. В нём едут два контролёра и несколько "зайцев". Контролёр ловит "зайца", если в какой–то момент оказывается с ним в одном вагоне. Пока поезд едет между станциями, каждый контролёр проверяет один вагон. На остановке каждый "заяц" может выскочить из вагона и перебежать в другой, но не далее, чем через два вагона в третий, после чего каждый из контролёров переходит в соседний вагон (в любую сторону). Новых "зайцев" на остановках не входит. Докажите, что если поезд делает 100 остановок, то за это время контролёры могут действовать так, что переловят всех "зайцев", независимо от того, в каких вагонах изначально оказались контролёры и "зайцы".

2. Найдите наименьшее число, состоящее из трёх единиц, трёх двоек, трёх троек и трёх четвёрок, которое делится на 8.

3. Клетки доски 9×9 раскрашены в два цвета так, что в любом «уголке» из 3 клеток есть клетки обоих цветов. Оказалось, что цвет трёх угловых клеток доски — чёрный и есть чёрная клетка, соседняя по стороне с одной из этих угловых. Докажите, что четвёртая угловая клетка — тоже чёрная.

4. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

5. В клетки таблицы 3×3 расставлены натуральные числа. Оказалось, что все шесть сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каково наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

6. На доске написаны числа 2, …, 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если же на доске останется только одно число, то игра считается закончившейся вничью. Может ли Вася не проиграть?

7. Один покупатель купил несколько товаров в магазине «Всё за 36 рублей», а второй — в магазине «Всё за 47 рублей». Первый покупатель потратил меньше рублей, но купил больше товаров. Докажите, что вместе они купили не менее 9 товаров.

8. Докажите, что из чисел 1, 2, …, 1000 можно выбрать 100 чисел так, что сумма любых пяти выбранных чисел будет нечётным составным числом.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота BE. Докажите, что $\angle CED > 45°$.

2. Через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проведены прямые, параллельные BD и AC соответственно. Докажите, что если точку пересечения этих прямых соединить с серединами всех сторон четырёхугольника $ABCD$, он разобьётся на четыре равновеликих части.

3. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — чётные натуральные числа $2a_1 \le 2a_2 \le \ldots \le 2a_n$. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине?

4. При каких натуральных n можно разложить $n(n-1)/2$ карточек, пронумерованных последовательно натуральными числами от 1 до $n(n-1)/2$, в n стопок таким образом, чтобы в любых двух стопках было по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и $n(n-1)/2$?

5. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

6. Найдите все тройки вещественных чисел (a, b, c) такие, что $a(b^2+c) = c(c+ab)$, $b(c^2+a) = a(a+bc)$ и $c(a^2+b) = b(b+ca)$.

7. Два разных нечётных простых числа p и q входят в разложение $n!$ на простые множители в одинаковой степени. Докажите, что $n < p(p+1)/2$.

8. Докажите, что если $a^2+b^2 = a^2b^2$ и $|a| \ne 1$, $|b| \ne 1$, то

$$\frac{a^7}{(1-a)^2} - \frac{a^7}{(1+a)^2} = \frac{b^7}{(1-b)^2} - \frac{b^7}{(1+b)^2}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O под прямым углом. При этом $DO \cdot OB = AO \cdot OC$. Лучи DA и CB пересекаются в точке M. Оказалось, что $DB = BM$. Найдите угол AMB.

2. Через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проведены прямые, параллельные BD и AC соответственно. Докажите, что если точку пересечения этих прямых соединить с серединами всех сторон четырёхугольника $ABCD$, он разобьётся на четыре равновеликих части.

3. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — чётные натуральные числа $2a_1 \le 2a_2 \le \ldots \le 2a_n$. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине?

4. Дано 2016 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 2016. Можно ли эти карточки разложить в 64 стопки таким образом, чтобы в любых двух стопках были по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и 2016

5. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

6. Натуральные числа x, y и z таковы, что числа $\frac{y+1}{x-1}$, $\frac{z+1}{y-1}$ и $\frac{x+1}{z-1}$ — целые. Найдите наибольшее возможное значение произведения xyz.

7. Два разных нечётных простых числа p и q входят в разложение $n!$ на простые множители в одинаковой степени. Докажите, что $n < p(p+1)/2$.

8. Докажите, что если $a^2+b^2 = a^2b^2$ и $|a| \ne 1$, $|b| \ne 1$, то

$$\frac{a^7}{(1-a)^2} - \frac{a^7}{(1+a)^2} = \frac{b^7}{(1-b)^2} - \frac{b^7}{(1+b)^2}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O под прямым углом. При этом $AO = 2OB$ и $DO = 2OC$. Лучи DA и CB пересекаются в точке M. Оказалось, что $DB = BM$. Найдите угол AMB.

2. Через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проведены прямые, параллельные BD и AC соответственно. Докажите, что если точку пересечения этих прямых соединить с серединами всех сторон четырёхугольника $ABCD$, он разобьётся на четыре равновеликих части.

3. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. У 11 участников конференции соответственно 20, 22, 24, …, 40 ног. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине?

4. Дана пачка карточек, пронумерованных последовательно натуральными числами от 1 до 150. Можно ли эти карточки разложить по вершинам 20-угольника таким образом, чтобы в любых двух вершинах нашлось по одной карточке с последовательными номерами?

5. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a–b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

6. Трёхзначное число $\overline{abc}$ назовём *геометрическим*, если его цифры различны и $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

На сколько наибольшее геометрическое число больше наименьшего?

7. Для скольких натуральных N, меньших 1000, уравнение $x^{[x]} = N$ имеет положительное решение? Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.

8. Докажите, что если $a^2+b^2 = a^2b^2$ и $|a| \neq 1$, $|b| \neq 1$, то

$$\frac{a^7}{(1-a)^2} - \frac{a^7}{(1+a)^2} = \frac{b^7}{(1-b)^2} - \frac{b^7}{(1+b)^2}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $2^x+3^y+7 = z!$.

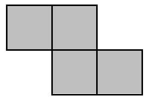
2. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

3. При каких натуральных n можно разложить $n(n-1)/2$ карточек, пронумерованных последовательно натуральными числами от 1 до $n(n-1)/2$, в n стопок таким образом, чтобы в любых двух стопках было по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и $n(n-1)/2$?

4. Для любого натурального n докажите, что число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее, чем n простых делителей.

5. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — это 100, 102, 104, …, 200. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине? Поднимать ботинки на гору и спускать с горы можно только на ногах. Все ноги существ одинаковы.

6. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



7. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $1 \le \dfrac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \le \dfrac{9}{8}$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота BE. Докажите, что $\angle CED > 45°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $2^x+3^y-7 = z!$.

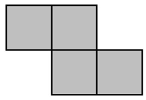
2. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

3. Дано 2016 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 2016. Можно ли эти карточки разложить в 64 стопки таким образом, чтобы в любых двух стопках были по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и 2016?

4. Дано натуральное число $n > 10$. Вокруг стола сидит n человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих n людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. При каких n по всем этим бумажкам можно наверняка установить, на ком какой колпак надет?

5. Дано натуральное число $n > 1000$, имеющее больше 5 делителей. Пусть $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ — пять его наибольших и отличных от n делителей. Может ли выполняться равенство $d_1+d_2+d_3-d_4+d_5 = n$?

6. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



7. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $1 \le \dfrac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \le \dfrac{5}{4}$.

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке I. Оказалось, что треугольник CC_1B остроугольный. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\angle AIB = 120°$, а угол между высотой и биссектрисой треугольника ABC, проведенными из точки C равен 10°.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $2^x+3^y-7 = z!$.

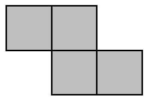
2. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

3. Часовщик сделал шуточные часы, в которых стрелки идут с обычной скоростью, но часовая идёт по часовой стрелке, а минутная — против. Во сколько раз чаще стрелки встречаются в шуточных часах, чем в обычных?

4. Вокруг стола сидит 30 человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих 30 человек пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. Всегда ли по всем этим бумажкам можно установить, на ком какой колпак надет?

5. Сумма 100 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

6. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



7. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $1 \le \dfrac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \le 2$.

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке I. Оказалось, что треугольник CC_1B остроугольный. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\angle AIB = 120°$, а угол между высотой и биссектрисой треугольника ABC, проведенными из точки C равен 10°.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно, с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

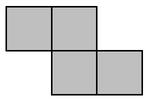
2. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a–b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

3. Часовщик сделал шуточные часы, в которых стрелки идут с обычной скоростью, но часовая идёт по часовой стрелке, а минутная — против. Во сколько раз чаще стрелки встречаются в шуточных часах, чем в обычных?

4. Вокруг стола сидит 20 человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих 20 человек пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. Всегда ли по всем этим бумажкам можно установить, на ком какой колпак надет?

5. Сумма 10 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

6. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из прямоугольника 4×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



7. Найдите все такие натуральные числа n и простые числа p, что $n+\dfrac{p}{n}$ — квадрат натурального числа.

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке I. Оказалось, что треугольник CC_1B остроугольный. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\angle AIB = 120°$, а угол между высотой и биссектрисой треугольника ABC, проведенными из точки C равен 10°.

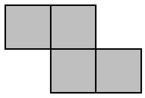
XLVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЕКАТЕРИНБУРГ, 28.11-04.12.2015

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a–2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

2. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



3. Сумма 100 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

4. Дано 2016 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 2016. Можно ли эти карточки разложить в 64 стопки таким образом, чтобы в любых двух стопках были по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и 2016?

5. В некоторой компании у каждого, кроме одного, ровно 100 знакомых, а у оставшегося — 50 знакомых. Могло ли так случиться, что для любых трёх людей (A, B, C) из этой компании среди остальных есть ровно трое, каждый из которых знаком и с A, и с B, и с C?

6. Дано натуральное число $n > 1000$, имеющее больше 5 делителей. Пусть $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ — пять его наибольших и отличных от n делителей. Может ли выполняться равенство $d_1+d_2+d_3–d_4+d_5 = n$?

7. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно, с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

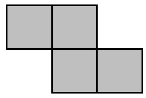
8. Дано натуральное число $n > 10$. Вокруг стола сидит n человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих n людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. При каких n по всем этим бумажкам можно наверняка установить, на ком какой колпак надет?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a–b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

2. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



3. Сумма 100 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

4. Дано 140 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 140. Можно ли эти карточки разложить в 17 стопок таким образом, чтобы в любых двух стопках были по одной карточке с последовательными номерами

5. В некоторой компании у каждого, кроме одного, ровно 100 знакомых, а у оставшегося — 50 знакомых. Могло ли так случиться, что у любых двух людей из этой компании ровно трое общих знакомых?

6. Дано натуральное число $n > 1000$, имеющее больше 5 делителей. Пусть $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ — пять его наибольших и отличных от n делителей. Может ли выполняться равенство $d_1+d_2+d_3–d_4+d_5 = n$?

7. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно, с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

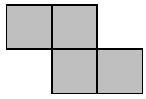
8. Вокруг стола сидит 50 человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих 50 людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. Докажите, что по всем этим бумажкам можно узнать, какого цвета колпак на каждом из сидящих.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a–b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

2. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из прямоугольника 4×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



3. Сумма 10 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

4. Дано 140 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 140. Можно ли эти карточки разложить по вершинам 17-угольника таким образом, чтобы в любых двух вершинах нашлось по одной карточке с последовательными номерами?

5. В Гамластане имеются в обращении разменные монеты нескольких номиналов (достоинств). Известно, что любую сумму от 1 до 99 крон можно уплатить не более чем 11 монетами. Какое наименьшее количество различных номиналов может быть в обращении?

6. Часовщик сделал шуточные часы, в которых стрелки идут с обычной скоростью, но часовая идёт по часовой стрелке, а минутная — против. Во сколько раз чаще стрелки встречаются в шуточных часах, чем в обычных?

7. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

8. Вокруг стола сидит 2015 человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из сидящих пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. Можно ли по этим ответам установить, на ком какой колпак надет?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Квадрат 1525×1525 разбит на единичные квадратики. 1526^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 750 из этих отрезков в серединах.

2. Десятизначное число называется *няшным*, если все его цифры — единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. Докажите, что сумма всех няшных чисел делится на 1408.

3. На ёлку пришли n детей. У каждого из них было ровно трое знакомых среди остальных собравшихся детей. На ёлке некоторые дети познакомились, и к концу праздника у каждого было уже ровно четверо знакомых среди собравшихся. При каких n такое возможно?

4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из всех натуральных чисел от 1 до 2^n так, чтобы для любых двух различных выбранных чисел x и y наибольшая степень 2, на которую делится $x-y$, имела чётный показатель?

5. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}>\sqrt{a+b+c}$.

6. Пусть $p_1 = 2$, а p_{n+1} для каждого натурального n определяется как наименьший простой делитель числа $np_1^{1!}p_2^{2!}\ldots p_n^{n!}+1$. Докажите, что в последовательности p_1, p_2, … встречаются все простые числа.

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, а N — внутренняя точка отрезка AM. Прямая, проходящая через точку N параллельно AB, пересекает прямую BM в точке P; прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BN в точке Q; прямая, проходящая через точку N параллельно AQ, пересекает прямую BC в точке S. Докажите, что прямые PS и AC параллельны.

8. На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону правильные треугольники ABD, BCE, CAF. Точки G, H, I — середины отрезков DE, EF, FD соответственно. Докажите, что $BG = CH = IA$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Квадрат 1525×1525 разбит на единичные квадратики. 1526^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 750 из этих отрезков в серединах.

2. Десятизначное число называется *няшным*, если все его цифры — единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. Докажите, что сумма всех няшных чисел делится на 1408.

3. На ёлку пришли n детей. У каждого из них было ровно трое знакомых среди остальных собравшихся детей. На ёлке некоторые дети познакомились, и к концу праздника у каждого было уже ровно четверо знакомых среди собравшихся. При каких n такое возможно?

4. В стране Альфабетии из любого города в любой можно добраться либо на самолете, либо на прямом железнодорожном экспрессе (не останавливающемся на промежуточных станциях). Как самолёты, так и поезда курсируют между городами в обоих направлениях. Докажите, что эту Альфабетию можно так разделить на две республики Альфию и Бетию, что, путешествуя на поезде, можно объехать все города Альфии, не заезжая ни в один город дважды и не покидая Альфии, а путешествуя на самолете, можно облететь все города Бетии, не посещая ни один город дважды и не покидая Бетии.

5. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}>\sqrt{a+b+c}$.

6. Различные нечётные простые числа p и q таковы, что p^2+p делится на q^2+q. Докажите, что число $(p-q)/2$ составное.

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, а N — внутренняя точка отрезка AM. Прямая, проходящая через точку N параллельно AB, пересекает прямую BM в точке P; прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BN в точке Q; прямая, проходящая через точку N параллельно AQ, пересекает прямую BC в точке S. Докажите, что прямые PS и AC параллельны.

8. На отрезке AC отмечена точка B. На отрезках AB и BC в одной полуплоскости, ограниченной прямой AC, построены правильные треугольники ABD и BCE, а на отрезке АС в другой полуплоскости построен правильный треугольник CAF. Точки G, H, I — середины отрезков DE, EF, FD соответственно. Докажите, что $BG = CH = IA$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

2. Двадцатизначное число называется *няшным*, если все его цифры — единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. Сколько существует няшных чисел?

3. На городскую ёлку пришли 1526 детей. У каждого из них было ровно трое знакомых среди остальных собравшихся детей. Могли ли на ёлке некоторые дети познакомиться так, чтобы к концу праздника у каждого было уже ровно четверо знакомых среди собравшихся?

4. Для последовательности a_1, a_2, ... построили последовательности b_1, b_2, ... и c_1, c_2, ... по следующему правилу: $b_n = a_{n+1} - a_n$, $c_n = b_{n+1} - b_n$ для каждого натурального n. Оказалось, что для каждого натурального n выполнено $c_n = 1$. Найдите a_1, если известно, что $a_{19} = a_{92} = 0$.

5. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство $\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} > \sqrt{a+b+c}$.

6. Существуют ли такие целые числа a, b, c, d, что числа $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$ (не обязательно в таком порядке) — четыре последовательных целых числа?

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, а N — середина отрезка AM. Прямая, проходящая через точку N параллельно AB, пересекает прямую BM в точке P; прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BN в точке Q; прямая, проходящая через точку N параллельно AQ, пересекает прямую BC в точке S. Докажите, что прямые PS и AC параллельны.

8. На отрезке AC отмечена точка B. На отрезках AB и BC в одной полуплоскости, ограниченной прямой AC, построены правильные треугольники ABD и BCE, а на отрезке AC в другой полуплоскости построен правильный треугольник CAF. Точки G, H, I — середины отрезков DE, EF, FD соответственно. Докажите, что $BG = CH = IA$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Выбрано 40 различных натуральных чисел от 1 до 1024. Докажите, что среди них есть два таких числа x и y, что в разложении на простые множители числа $x-y$ нечетное число двоек.

2. Ребра полного графа на 2015 вершинах покрашены в черный и белый цвета. Докажите, что вершины графа можно разбить на две группы, удовлетворяющие следующим условиям: в первой группе существует путь по ребрам белого цвета, проходящий через каждую вершину ровно один раз, а во второй группе есть цикл из ребер черного цвета, проходящий через каждую вершину ровно один раз (в любой из групп допускается наличие ровно одной вершины).

3. Квадрат 2015×2015 разбит на единичные квадратики. 2016^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 1008 из этих отрезков во внутренних точках. Прямую, проходящую по линиям сетки проводить запрещается.

4. Назовем натуральное число *удивительным*, если оно либо равно 2, либо имеет вид 3^n5^k (k и n — неотрицательные целые числа). Докажите, что каждое натуральное число либо само удивительное, либо его можно представить в виде суммы различных удивительных чисел.

5. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

6. Найдите все натуральные числа l, m, n, для которых $5^l43^m+1 = n^3$.

7. Найдите все такие вещественные числа a, что для любых вещественных чисел x и y верно неравенство $x^4+y^4+axy+2 \geq 0$.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона BC в два раза больше стороны AB. Известно, что $\angle BDC = 90°$ и $\angle BAD = \angle CBD < 60°$. Докажите, что $AB+AD > 2BD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написаны числа от 1 до 2000 включительно. Каждое из них окрасили в красный или синий цвет таким образом, что для любого числа $a \leq 1000$ хотя бы одно число, кратное a, окрашено в цвет, отличный от a. Какое минимальное значение может принимать сумма всех синих чисел?

2. В стране Альфабетии из любого города в любой можно добраться либо на самолете, либо на прямом железнодорожном экспрессе (не останавливающемся на промежуточных станциях). Как самолёты, так и поезда курсируют между городами в обоих направлениях. Докажите, что эту Альфабетию можно так разделить на две республики Альфию и Бетию, что, путешествуя на поезде, можно объехать все города Альфии, не заезжая ни в один город дважды и не покидая Альфии, а путешествуя на самолете, можно облететь все города Бетии, не посещая ни один город дважды и не покидая Бетии.

3. Квадрат 2015×2015 разбит на единичные квадратики. 2016^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 506 из этих отрезков во внутренних точках. Прямую, проходящую по линиям сетки проводить запрещается.

4. Назовем натуральное число *удивительным*, если оно либо равно 2, либо имеет вид 3^n5^k (k и n — неотрицательные целые числа). Докажите, что каждое натуральное число либо само удивительное, либо его можно представить в виде суммы различных удивительных чисел.

5. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

6. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого n^4+1395 делится на $n+5$.

7. Найдите все такие вещественные числа a, что для любых вещественных чисел x и y верно неравенство $x^4+y^4+axy+2 \geq 0$.

8. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и AD равны, $AC+CD = 2AB$, $\angle BAC=60°$ и $\angle BCA = \angle CAD+\angle DCA$. Найдите $\angle ACD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

2. На столе стоит 50 гирь. Каждая весит не менее 490, но не более 1510 граммов. Оказалось, что при выкидывании любой гири суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все гири равны по весу.

3. Квадрат 2015×2015 разбит на единичные квадратики. 2016^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 504 из этих отрезков во внутренних точках. Прямую, проходящую по линиям сетки проводить запрещается.

4. На некоторых, но не всех, клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для каждой свободной клетки количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, в сумме равно 2. Сколько всего шашек может быть на доске?

5. Существует ли 2015-значное число, состоящее только из единиц и двоек, которое делится на число из 100 единиц?

6. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого n^4+1395 делится на $n+5$.

7. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $x^4+y^4+2 \geq 2xy$.

8. В магазине продаются наборы из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки (степени двойки — это числа 1, 2, 4, 8, …, где каждое следующее число равно удвоенному предыдущему). Петя купил два одинаковых таких набора. Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из них? Треугольники одинаковые, если у них одинаковые наборы длин сторон.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

2. На столе стоит 50 гирь. Каждая весит не менее 500, но не более1500 граммов (каждая гиря весит целое число граммов). Оказалось, что при выкидывании любой гири суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все гири равны по весу.

3. Квадрат 15×15 разбит на единичные квадратики. 256 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести горизонтальную или вертикальную прямую, не проходящую по линиям сетки и пересекающую не менее 4 из этих отрезков в серединах.

4. На некоторых, но не всех, клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для каждой свободной клетки количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, в сумме равно 2. Сколько всего шашек может быть на доске?

5. Существует ли 2015-значное число, состоящее только из единиц и двоек, которое делится на число из 100 единиц?

6. Четыре машины выехали из города, имея по полному баку бензина объёмом 100 л каждая. Бака бензина машине хватает на 600 км. Во время пути машинам можно остановиться, и из любых машин перелить часть или весь имеющейся бензин в любые другие, если в баке у тех машин есть место. Могут ли машины доставить на расстояние 1000 км от города более 40 л бензина?

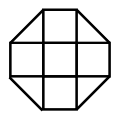
7. Решите в простых числах уравнение $16pq = 21(p^2+q)$.

8. В магазине продаются наборы из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки (степени двойки — это числа 1, 2, 4, 8, ..., где каждое следующее число равно удвоенному предыдущему). Петя купил два одинаковых таких набора. Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из них? Треугольники одинаковые, если у них одинаковые наборы длин сторон.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Даны квадрат 100×100 и восьмиугольник, состоящий из "креста" из 5 единичных квадратиков и 4 треугольничков (см. рисунок). Можно ли несколькими такими восьмиугольниками покрыть квадрат в несколько слоёв? (Восьмиугольники могут вылезать за пределы квадрата, каждая точка квадрата, не лежащая на сторонах восьмиугольников, должна быть покрыта одно и то же число раз).



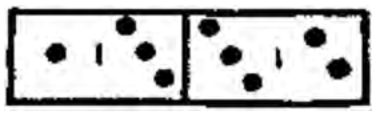
2. При каком наименьшем $n > 100$ существует n-значное число, состоящее только из единиц и троек, которое делится на число из 100 единиц?

3. В стране Альфабетии из любого города в любой можно добраться либо на самолете, либо на прямом железнодорожном экспрессе (не останавливающемся на промежуточных станциях). Как самолёты, так и поезда курсируют между городами в обоих направлениях. Докажите, что эту Альфабетию можно так разделить на две республики Альфию и Бетию, что, путешествуя на поезде, можно объехать все города Альфии, не заезжая ни в один город дважды и не покидая Альфии, а путешествуя на самолете, можно облететь все города Бетии, не посещая ни один город дважды и не покидая Бетии.

4. На доске написаны числа от 1 до 2000 включительно. Каждое из них окрасили в красный или синий цвет таким образом, что для любого числа $a \le 1000$ хотя бы одно число, кратное a, окрашено в цвет, отличный от a. Какое минимальное значение может принимать сумма всех синих чисел?

5. На столе стоит 50 камней. Каждый весит не менее 490, но не более 1510 граммов (не обязательно целое число граммов). Оказалось, что при выкидывании любого камня суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все камни равны по весу.

6. Расположенные в ряд по правилам игры две костяшки домино, изображённые на картинке, обладают тем свойством, что объединяя несколько очков, непосредственно прилегающих друг к другу, можно получить любое число от 1 до 9. Так, 1, 2, и 3 можно увидеть непосредственно, 4 получается как сумма 1+3, 5 — как сумма 3+2, 6 = 3+3, 7 = 1+3+3, 8 = 3+3+2, 9 = 1+3+3+2. Можно ли аналогичным образом расположить 4 костяшки, не являющиеся дублями, чтобы получить любое число от 1 до 24?

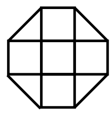


7. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

8. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА



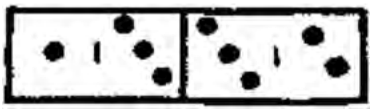
1. Даны квадрат 100×100 и восьмиугольник, состоящий из "креста" из 5 единичных квадратиков и 4 треугольничков (см. рисунок). Можно ли несколькими такими восьмиугольниками покрыть квадрат в несколько слоёв? (Восьмиугольники могут вылезать за пределы квадрата, каждая точка квадрата, не лежащая на сторонах восьмиугольников, должна быть покрыта одно и то же число раз).

2. При каком наименьшем $n > 100$ существует n-значное число, состоящее только из единиц и троек, которое делится на число из 100 единиц?

3. На ёлку пришли n детей. У каждого из них было ровно трое знакомых среди остальных собравшихся детей. На ёлке некоторые дети познакомились, и к концу праздника у каждого было уже ровно четверо знакомых среди собравшихся. Найдите все натуральные n, для которых такое возможно.

4. На некоторых клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для любой свободной клетки (причём хотя бы одна такая есть) количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, суммарно равно 8. Можно ли по этой информации однозначно определить, сколько всего шашек выставлено?

5. На столе стоит 50 камней. Каждый весит не менее 490, но не более 1510 граммов (не обязательно целое число граммов). Оказалось, что при выкидывании любого камня суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все камни равны по весу.



6. Расположенные в ряд по правилам игры две костяшки домино, изображённые на картинке, обладают тем свойством, что объединяя несколько очков, непосредственно прилегающих друг к другу, можно получить любое число от 1 до 9. Так, 1, 2, и 3 можно увидеть непосредственно, 4 получается как сумма 1+3, 5 — как сумма 3+2, 6 = 3+3, 7 = 1+3+3, 8 = 3+3+2, 9 = 1+3+3+2. Можно ли аналогичным образом расположить 4 костяшки, не являющиеся дублями, чтобы получить любое число от 1 до 24?

7. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

8. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе лежат 50 камней. Каждый весит не менее 500, но не более 1500 грамм (не обязательно целое число граммов). Оказалось, что при выкидывании любого камня суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все камни равны по весу.

2. Существует ли 2015-значное число, состоящее только из единиц и двоек, которое делится на число из 100 единиц?

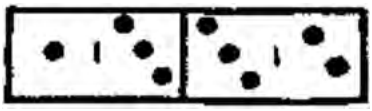
3. Четыре машины выехали из города, имея по полному баку бензина объёмом 100 л каждая. Бака бензина машине хватает на 600 км. Во время пути машинам можно остановиться, и из любых машин перелить часть или весь имеющейся бензин в любые другие, если в баке у тех машин есть место. Могут ли машины доставить на расстояние 1000 км от города более 40 л бензина?

4. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

5. На некоторых, но не всех, клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для каждой свободной клетки количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, в сумме равно 2. Сколько всего шашек может быть на доске?

6. 12-значное число делится на 9. Его цифры зашифровали буквами, разные – разными, одинаковые — одинаковыми. Получилось слово ЕКАТЕРИНБУРГ. Чему равна сумма Р+Е?

7. Расположенные в ряд по правилам игры две костяшки домино, изображённые на картинке, обладают тем свойством, что объединяя несколько очков, непосредственно прилегающих друг к другу, можно получить любое число от 1 до 9. Так, 1, 2, и 3 можно увидеть непосредственно, 4 получается как сумма 1+3, 5 — как сумма 3+2, 6 = 3+3, 7 = 1+3+3, 8 = 3+3+2, 9 = 1+3+3+2. Можно ли аналогичным образом расположить 4 костяшки, не являющиеся дублями, чтобы получить любое число от 1 до 24?



8. В магазине продаются наборы из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки (степени двойки – это числа 1, 2, 4, 8, …, где каждое следующее число равно удвоенному предыдущему). Петя купил два одинаковых таких набора. Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из них? Известно, что для составления треугольника сумма длин двух меньших палочек должна быть больше большей палочки. Треугольники одинаковые, если у них одинаковые наборы длин сторон.