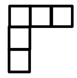
XLV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 20–26.02.2015

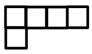
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 21.02.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Во сколько раз надо увеличить скорость минутной стрелки, не меняя скорости часовой, чтобы она стала обгонять часовую в два раза чаще?

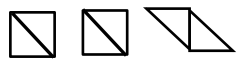
2. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разрезать как на такие



уголки , так и на такие  уголки?

3. Очень терпеливый мальчик Вася пишет на очень длинной полосе бумаги число. Сначала он пишет 1, потом приписывает к нему справа 2 (и получает 12), затем 3, 4 и т. д (например, на двенадцатом шаге он получит число 123456789101112). Докажите, что на каком-то шаге у Васи будет выписано число, делящееся на 24000.

4. Дан клетчатый квадрат 100×100. Его разбили на квадратики 1×1. Каждый из 100 квадратиков, стоящих на диагонали из левого верхнего угла в правый нижний, разрезали по диагонали: в верхних 50 диагональ идет как на левом рисунке, а в нижних — как на среднем рисунке. После чего остальные квадратики тоже разбили, но уже произвольным образом. Докажите, что в получившемся разбиении можно выделить не менее 100 фигурок (возможно, частично налегающих друг на друга) таких, как на правом рисунке (возможно, повёрнутых или перевёрнутых).



5. В каждой вершине десятиугольника сидит некоторое количество (возможно, ни одного) кузнечиков и некоторое количество (возможно, ни одной) блох. На каждой из десяти сторон написаны два числа: первое — суммарное количество кузнечиков на концах этой стороны, второе — суммарное количество блох в концах этой стороны. Оказалось, что все написанные пары чисел различны (пары, отличающиеся только порядком чисел, например, (1, 0) и (0, 1) тоже считаются различными) Каково наименьшее возможное суммарное количество насекомых?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 21.02.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Дима поставил в каждой вершине девятиугольника одно зеленое и одно синее натуральное число. Сумма всех расставленных чисел равна 27. На каждой стороне он написал зеленым цветом сумму зеленых чисел, расположенных в концах этой стороны, а синим цветом — сумму синих чисел, расположенных в концах этой стороны. Как Дима должен был расставить числа, чтобы не было двух сторон девятиугольника, на которых совпадали бы и зеленые и синие числа?

2. За круглым столом сидят 30 человек. Некоторые из них — лжецы и всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Известно, что у каждого лжеца ровно один из его соседей — тоже лжец. Каждого из 30 человек спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. 12 человек ответили, что ровно один, а остальные — что два (каждый из сидящих за столом знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец). Сколько всего лжецов за столом?

3. Леша написал на рулоне туалетной бумаги число 1. Потом приписал к нему справа 2 (и получил 12), затем 3, 4 и т.д. Например, на двенадцатом шаге он получил число 123456789101112. Когда Лешино число впервые поделится на 24000?

4. В квадрате 100×100 клетки покрашены в синий и зеленый цвета. Причем на диагонали из левого верхнего угла в правый нижний есть 50 синих и 50 зеленых клеток. Докажите, что из доски всегда можно вырезать 50 прямоугольников 1×2 с разноцветными клетками.

5. Неполное частное от деления квадрата нечетного числа на 16 оказалось простым числом. Чему может быть равно это простое число?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 21.02.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. На доске были написаны все натуральные числа от 1 до некоторого n, кратного 50. Затем все числа, кратные 50, стёрли. Докажите, что сумма оставшихся чисел — точный квадрат.

2. За круглым столом сидят 30 человек. Некоторые из них — лжецы и всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Известно, что у каждого лжеца ровно один из его соседей — тоже лжец. Каждого из 30 человек спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. 12 человек ответили, что ровно один, а остальные — что два (каждый из сидящих за столом знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец). Сколько всего лжецов за столом?

3. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка K, а на стороне BC — точка L так, что $\angle KBC = 10°$ и $\angle LAC = 20°$. Найдите величину угла ALK, если известно, что $\angle BCA = 40°$ и $\angle BAC = 80°$.

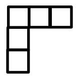
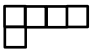
4. Клетчатый квадрат 100×100 разбит на единичные квадратики. В каждом из квадратиков, расположенных на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, провели диагональ: в верхних 50 вдоль диагонали большого квадрата, а в нижних — перпендикулярно ей. Затем в остальных квадратиках произвольным образом провели по одной диагонали. Какое наибольшее количество параллелограммов, составленных из двух половин соседних квадратиков, заведомо можно найти на получившейся картинке?

5. Натуральные числа $a, b, c > 1$ таковы, что $a^3+b^3+c^3-3abc$ делится на $(abc)^2$. Докажите, что $a = b = c$.

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Во сколько раз надо увеличить скорость минутной стрелки, не меняя скорости часовой, чтобы она стала обгонять часовую в два раза чаще?*

Ответ. В 23/12 раза. Решение. Скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой, и поскольку они вращаются в одном направлении, минутная стрелка догоняет часовую со скоростью, в 11 раз большей скорости часовой стрелки. Чтобы минутная стрелка стала обгонять часовую в два раза чаще, она должна догонять часовую со скоростью, в 22 раза большей скорости часовой. Собственная скорость минутной стрелки при этом будет в 23 раза больше скорости часовой, то есть её скорость надо увеличить в 23/12 раза.

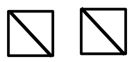
Задача 2. *Существует ли клетчатая фигура, которую можно разрезать как на такие*  *уголки, так и на такие*  *уголки?*

Ответ. Существует. Решение. Например, такова «рамка», которая получится, если из клетчатого квадрата 6×6 вырезать клетчатый квадрат 4×4 с тем же центром.

Задача 3. *Очень терпеливый мальчик Вася пишет на очень длинной полосе бумаги число. Сначала он пишет 1, потом приписывает к нему справа 2 (и получает 12), затем 3, 4 и т. д (например, на двенадцатом шаге он получит число 123456789101112). Докажите, что на каком-то шаге у Васи будет выписано число, делящееся на 24000.*

Решение. Покажем, что число, делящееся на 24000, получится, например, на 3000000-ом шаге. Действительно, число, оканчивающееся на 3000000, делится на 1000000, а $1000000 = 1000\cdot 1000$ делится на $1000\cdot 8 = 8000$. Осталось показать, что число, получившееся после 3000000-го шага, делится на 3. Для этого заметим, что если сложить все цифры трёх идущих подряд натуральных чисел, сумма будет делиться на 3 (например, потому, что остатки от деления на 3 этих чисел, а, значит, и сумм их цифр, равны 0, 1 и 2), а все натуральные числа от 1 до 3000000 можно разбить на такие тройки.

Задача 4. *Дан клетчатый квадрат 100×100. Его разбили на квадратики 1×1. Каждый из 100 квадратиков, стоящих на диагонали из левого верхнего угла в правый нижний, разрезали по диагонали: в верхних 50 диагональ идет как на левом рисунке, а в нижних — как на среднем рисунке. После чего остальные квадратики тоже разбили, но уже произвольным образом. Докажите, что в получившемся разбиении можно выделить не менее 100 (возможно, частично налегающих друг на друга) фигурок таких, как на правом рисунке (возможно, повёрнутых или перевёрнутых).*



Решение. Назовём клетку *левой*/*правой*, если диагональ в ней проведена как на левом/среднем рисунке. Фигурка с правого рисунка возникает, когда рядом стоят две левых или две правых клетки. Разрежем квадрат 100×100 на 50 клетчатых рамок ширины 1 (со сторонами 100, 98, …, 4, 2; последняя «рамка» — квадрат 2×2 в центре квадрата 100×100). По условию в левом верхнем и правом нижнем углах каждой рамки стоят клетки разных типов. Поскольку между этими клетками в каждой из двух половинок каждой рамки находится нечётное число клеток, чередоваться клетки разных типов в этих половинках не могут. Поэтому в каждой из половинок каждой рамки найдутся две клетки одного типа, стоящие рядом, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 5. *В каждой вершине десятиугольника сидит некоторое количество (возможно, ни одного) кузнечиков и некоторое количество (возможно, ни одной) блох. На каждой из десяти сторон написаны два числа: первое — суммарное количество кузнечиков на концах этой стороны, второе — суммарное количество блох в концах этой стороны. Оказалось, что все написанные пары чисел различны (пары, отличающиеся порядком чисел, например, пары (1,0) и (0,1) тоже считаются различными). Каково наименьшее возможное суммарное количество насекомых?*

Ответ. 10. Решение. Наименьшие по количеству насекомых пары: (0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (2,0), (1,1), (0,3), (3,0), (1,2), (2,1). Общее число насекомых в этих парах — 20, а так как каждое насекомое считается дважды, то насекомых не меньше 10. Пример, когда их ровно 10 (число насекомых в вершинах по часовой стрелке): (0,0), (0,0), (2,0), (1,0), (0,0), (1,1), (1,0), (0,2), (0,1), (0,1).

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Дима поставил в каждой вершине девятиугольника одно зеленое и одно синее натуральное число. Сумма всех расставленных чисел равна 27. На каждой стороне он написал зеленым цветом сумму зеленых чисел, расположенных в концах этой стороны, а синим цветом — сумму синих чисел, расположенных в концах этой стороны. Как Дима должен был расставить числа, чтобы не было двух сторон девятиугольника, на которых совпадали бы и зеленые и синие числа?*

Решение. Например, так: (2,1), (3,1), (1,2), (1,2), (2,1), (1,3), (1,2), (1,1), (1,1). Примеров много.

Задача 2. *За круглым столом сидят 30 человек. Некоторые из них — лжецы и всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Известно, что у каждого лжеца ровно один из его соседей — тоже лжец. Каждого из 30 человек спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. 12 человек ответили, что ровно один, а остальные — что два (каждый из сидящих за столом знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец). Сколько всего лжецов за столом?*

Ответ. 16. Решение. Так как рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец, лжецы сидят парами, окружёнными рыцарями. Заметим также, что три рыцаря не могут сидеть подряд. Очевидно, «ровно один» ответили в точности рыцари, сидящие между рыцарем и лжецом (и такие рыцари сидят парами), а «ровно два» — все лжецы и рыцари, сидящие между лжецами. Таким образом, рыцарей, сидящих парами, 12 человек. Пусть лжецов $2k$ человек, а рыцарей, сидящих между двумя лжецами — m человек. Шесть пар рыцарей и m рыцарей-одиночек разбивают окружность стола на $6+m$ промежутков, в каждом из которых сидит пара лжецов. Поэтому $6+m = k$. С другой стороны, «ровно два» сказали $2k+m = 18$ человек. Вычитая из второго равенства первое, получаем $3k = 24$, откуда и вытекает ответ.

Задача 3. *Леша написал на рулоне туалетной бумаги число 1. Потом приписал к нему справа 2 (и получил 12), затем 3, 4 и т.д. Например, на двенадцатом шаге он получил число 123456789101112. Когда Лешино число впервые поделится на 24000?*

Ответ. После 2000-го шага. Решение. Лёшино число должно делиться на 1000. Поэтому искомый номер n шага должен оканчиваться тремя нулями, то есть тоже должен делиться на 1000. Если зачеркнуть эти три нуля, оставшееся число должно делиться на 24, то есть на 8 и на 3. Делимость на 8 равносильна делимости на 8 числа, составленного из трёх последних цифр оставшегося после зачёркивания нулей числа. Предположим, что число n четырёхзначно (меньше знаков в нём быть не может) и начинается на цифру a. Тогда три последние цифры имеют вид $99a$. Такое число делится на 8 только при $a = 2$. Так как среди чисел от 1 до 2000 поровну чисел вида $3k+1$ и $3k+2$, сумма всех цифр числа, выписанного Лёшей после 2000-го шага, делится на 3, а, значит, делится на 3 и само это число.

Задача 4. *В квадрате 100×100 клетки покрашены в синий и зеленый цвета. Причем на диагонали из левого верхнего угла в правый нижний есть 50 синих и 50 зеленых клеток. Докажите, что из доски всегда можно вырезать 50 прямоугольников 1×2 с разноцветными клетками.*

Решение. Соединим самую верхнюю зелёную клетку на диагонали с самой нижней синей, двигаясь вниз по вертикали до горизонтали, где стоит эта синяя клетка, а потом — вправо по горизонтали. То же проделаем со второй сверху зелёной и второй снизу синей диагональными клетками и т.д., доколе возможно. Когда станет невозможно, все оставшиеся на диагонали зелёные клетки будут ниже всех оставшихся синих. Соединим самую нижнюю из оставшихся зелёных клеток с самой верхней из оставшихся синих, двигаясь вверх по вертикали до горизонтали, где стоит эта синяя клетка, а потом — влево по горизонтали. То же проделаем со второй снизу из оставшихся зелёных и второй снизу из оставшихся синих диагональных клеток и т.д. В итоге у нас получится 50 непересекающихся путей, у каждого из которых разноцветные концы. Очевидно, на каждом из таких путей окажется хотя бы по одной разноцветной паре соседних по стороне клеток, так что мы сможем вырезать 50 искомых прямоугольников 1×2.

Задача 5. *Неполное частное от деления квадрата нечетного числа на 16 оказалось простым числом. Чему может быть равно это простое число?*

Ответ. 3, 5, 7. Решение. Так как $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$, и $4k(k+1)$ делится на 8, квадрат нечётного числа при делении на 16 может давать только остатки 1 и 9. Таким образом, имеем либо $16p = m^2-1 = (m-1)(m+1)$ (1), либо $16p = m^2-9 = (m-3)(m+3)$ (2). В каждом из равенств (1), (2) скобки имеют одинаковую чётность. Так как $p = 2$ нам не подходит ($16\cdot2+1$ и $16\cdot2+9$ — не квадраты), можно считать, что p нечётно. Поэтому одна из скобок в каждом из равенств (1), (2) делится на $2p$, а вторая — не больше 8. Пусть, например, $m+3$ делится на $2p$.

Тогда $m-3 \leq 8$, откуда $2p \leq m+3 \leq 14$. В трёх других случаях получаем ещё более сильные ограничения на величину p. Таким образом, осталось проверить $p = 2, 3, 5, 7$. Перебирая, находим, что числа 3, 5 и 7 подходят, а 2 — нет.

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. *На доске были написаны все натуральные числа от 1 до некоторого n, кратного 50. Затем все числа, кратные 50, стёрли. Докажите, что сумма оставшихся чисел — точный квадрат*

Решение. Пусть $n = 50m$. Тогда сумма оставшихся чисел равна $(1+2+\ldots+50m)–50(1+2+\ldots+m) = 25m(50m+1)–25m(m+1) = 25\cdot 49m^2 = (35m)^2$.

Задача 2. *За круглым столом сидят 30 человек. Некоторые из них — лжецы и всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Известно, что у каждого лжеца ровно один из его соседей — тоже лжец. Каждого из 30 человек спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. 12 человек ответили, что ровно один, а остальные — что два (каждый из сидящих за столом знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец). Сколько всего лжецов за столом?*

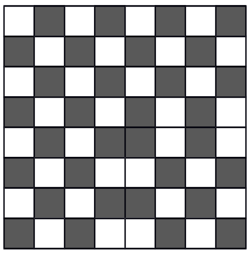
Ответ. 16. Решение. Так как рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец, лжецы сидят парами, окружёнными рыцарями. Заметим также, что три рыцаря не могут сидеть подряд. Очевидно, «ровно один» ответили в точности рыцари, сидящие между рыцарем и лжецом (и такие рыцари сидят парами), а «ровно два» — все лжецы и рыцари, сидящие между лжецами. Таким образом, рыцарей, сидящих парами, 12 человек. Пусть лжецов $2k$ человек, а рыцарей, сидящих между двумя лжецами — m человек. Шесть пар рыцарей и m рыцарей-одиночек разбивают окружность стола на $6+m$ промежутков, в каждом из которых сидит пара лжецов. Поэтому $6+m = k$. С другой стороны, «ровно два» сказали $2k+m = 18$ человек. Вычитая из второго равенства первое, получаем $3k = 24$, откуда и вытекает ответ.

Задача 3. *В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка K, а на стороне BC — точка L так, что $\angle KBC = 10°$ и $\angle LAC = 20°$. Найдите величину угла ALK, если известно, что $\angle BCA = 40°$ и $\angle BAC = 80°$.*

Ответ. 80°. Решение. $\angle ABC = 180°–\angle BCA–\angle BAC = 60°$, $\angle BAL = 80°–\angle LAC = 60°$, значит, треугольник ABL — равносторонний. Заметим, что треугольник ABK равнобедренный, так как $\angle ABK = \angle ABL–\angle KBC = 50°$, а $\angle BAK = 80°$. Откуда получаем, что $AL = AB = AK$. Следовательно, треугольник AKL — равнобедренный с углом 20° при вершине, откуда $\angle ALK = 80°$.

Задача 4. *Клетчатый квадрат 100×100 разбит на единичные квадратики. В каждом из квадратиков, расположенных на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, провели диагональ: в верхних 50 вдоль диагонали большого квадрата, а в нижних — перпендикулярно ей. Затем в остальных квадратиках произвольным образом провели по одной диагонали. Какое наибольшее количество параллелограммов, составленных из двух половин соседних квадратиков, заведомо можно найти на получившейся картинке?*

Ответ. 100. Решение. *Оценка*. Окрасим в белый (черный) цвет клетки, в которых диагонали проведены как в левой верхней (правой нижней) клетке. Тогда дело сводится к поиску количества пар соседних одноцветных клеток. Пройдем от белой клетки (1, 1) к черной клетке (100, 100) по верхней строке и правому столбцу. Всего на этом пути нечетное число (199) клеток, поэтому чередоваться по цвету они не могут. Значит, найдется пара одноцветных соседей. Такая же пара найдется на втором пути (по левому столбцу и нижней строке), соединяющем эти две клетки. Аналогично соединим двумя путями клетки (2, 2) и (99, 99), (3, 3) и (98, 98), …, (50, 50) и (51, 51). На каждом таком пути будет пара одноцветных соседей и все эти 100 пар разные. *Пример*. На рисунке приведена раскраска доски 8×8, где есть ровно 8 пар одноцветных соседей. Раскраска доски 100×100 строится аналогично (сначала красим все клетки в шахматном порядке, а потом в правом нижнем квадрате 50×50 заменяем цвета всех клеток на противоположные).



Задача 5. *Натуральные числа a, b, c > 1 таковы, что $a^3+b^3+c^3–3abc$ делится на $(abc)^2$. Докажите, что $a = b = c$.*

Решение. Ниже мы докажем, что $a^3+b^3+c^3–3abc = 0$ (*). После этого утверждение задачи следует из равенства $0 = a^3+b^3+c^3–3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2–ab–ac–bc)$, откуда $a^2+b^2+c^2–ab–ac–bc = ((a–b)^2+(a–c)^2+(b–c)^2)/2= 0$ (**).

Пусть равенство (*) неверно. Можно считать, что $a \geq b \geq c \geq 2$, причём $a > c$ (иначе всё уже доказано). Из равенства (**) следует, что $a^3+b^3+c^3–3abc > 0$. Кроме того, $a^3+b^3+c^3–3abc < 2a^3$, так как $c^3–abc < 0$, а $b^3–2abc < a^3$. Поэтому $(abc)^2 < 2a^3$, откуда $(bc)^2 < 2a$. Тогда $c^3 \leq b^3 = b^4c^4/(bc^4) < 4a^2/32 = a^2/8$. Следовательно, $|b^3+c^3–3abc| < \max\{b^3+c^3,\ 3abc\} \leq \max\{a^2/4,\ 3abc\} \leq \max\{a^2/4,\ 6a^2/bc\}$. Пусть $bc \geq 6$. Тогда $\max\{a^2/4,\ 6a^2/bc\} \leq a^2$, откуда $|b^3+c^3–3abc| < a^2$. Но $a^3+b^3+c^3–3abc$ делится на a^2, откуда $b^3+c^3–3abc = 0$. Но $b^3+c^3 < b^3c^3 \leq 2abc < 3abc$ — противоречие. Пусть $bc < 6$. Тогда $b = c = 2$, $a^3+b^3+c^3–3abc = a^3–12a+16$, а

$(abc)^2 = 16a^2$. Следовательно, a — делитель числа 16, то есть равняется 4, 8 или 16. Перебирая эти три случая, убеждаемся, что они не удовлетворяют условию задачи.