

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 30.11.2014

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. По кругу стоят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Могло ли случиться, что каждый из них сказал: «Среди двоих, следующих за мной по часовой стрелке, есть лжец»?
2. Мама Пети и Васи испекла пирожки. Петя пришёл на кухню, съел сперва один, а потом четверть от всех оставшихся. Потом на кухню пришёл Вася, и тоже съел сперва один пирожок, а потом четверть от всех оставшихся. А потом на кухню пришла мама и обнаружила, что осталось больше 50, но меньше 60 пирожков. Сколько пирожков испекла мама? (Пирожки нельзя ломать — можно есть только целыми).
3. Может ли не равное 0 произведение $Я \cdot Р \cdot О \cdot С \cdot Л \cdot А \cdot В \cdot Л \cdot Ъ$ делиться на нечётную сумму $Я + Р + О + С + Л + А + В + Л + Ъ$? Здесь одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными.
4. По окружности стоят числа 1, 2, ..., 12 (именно в таком порядке). Можно ли эту окружность разрезать на 4 части таким образом, чтобы суммы чисел, стоящих в этих частях, были равны четырём последовательным натуральным числам? (На каждой части расположены одно или несколько стоящих подряд по окружности чисел.)
5. Найдите все натуральные числа n и k , для которых $10^{n+2} - 10^{n+2k} = 2014$.
6. Можно ли разрезать клетчатый квадрат размером 101×101 на квадраты из четырёх клеток и показанные на рисунке «уголки» из пяти клеток? 
7. На трибунах арены «Локомотив» собралось 2015 болельщиков. Могло ли так случиться, что для каждого неотрицательного целого k выполняется следующее свойство: если есть болельщик, знакомый ровно с k другими болельщиками, то есть ровно k болельщиков с таким свойством?
8. В каждой клетке шахматной доски стоит натуральное число, причём все числа различны. За один ход можно изменить любое число. За какое наименьшее число ходов можно сделать так, что в каждой строке и в каждом столбце будет хотя бы по два равных числа?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ ЮНИОРОВ

1. По кругу стоят несколько (больше 100) человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал: «Среди ста человек, следующих за мной по часовой стрелке, не более одного лжеца». Докажите, что либо все стоящие по кругу — рыцари, либо все — лжецы.
2. По окружности стоят числа $1, 2, \dots, 12$ (именно в таком порядке). Можно ли эту окружность разрезать на 4 части таким образом, чтобы суммы чисел, стоящих в этих частях, были равны четырём последовательным натуральным числам? (На каждой части расположены одно или несколько стоящих подряд по окружности чисел.)
3. Чему может равняться L в ситуации, когда не равное 0 произведение $Я \cdot Р \cdot О \cdot С \cdot Л \cdot А \cdot В \cdot Л \cdot Ъ$ делится на нечётную сумму $Я+Р+О+С+Л+А+В+Л+Ъ$ (здесь одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными)?
4. Известно, что $a > b > 0$. Докажите неравенство $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} < \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$.
5. На трибунах арены «Локомотив» собралось 2015 болельщиков. Могло ли так случиться, что для каждого неотрицательного целого k выполняется следующее свойство: если есть болельщик, знакомый ровно с k другими болельщиками, то есть ровно k болельщиков с таким свойством?
6. Решите в натуральных числах уравнение $2^k + 10^m - 10^n = 2014$.
7. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом 40° при вершине B . На сторонах BC , CA и AB отмечены точки D , E и F соответственно. Оказалось, что $AE = CD$ и $DE = BF$, $\angle BDE = \angle CEF = 100^\circ$. Найдите угол ABE .
8. В каждой клетке доски 100×100 стоит натуральное число, причём все числа различны. За один ход можно изменить любое число. За какое наименьшее число ходов можно сделать так, что в каждой строке и в каждом столбце будет хотя бы по два равных числа?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ СЕНЬОРОВ

1. Дано натуральное число n , большее 1 и меньшее 2014. По кругу стоят 2014 человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из стоящих сказал: «Среди n человек, следующих за мной по часовой стрелке, не более одного лжеца». Сколько лжецов могло быть среди стоящих?
2. По окружности стоят числа $1, 2, \dots, 14$ (именно в таком порядке). При каком наибольшем $k < 14$ эту окружность можно разрезать на k частей таким образом, чтобы суммы чисел, стоящих в этих частях, были равны k последовательным натуральным числам? (На каждой части расположены одно или несколько стоящих подряд по окружности чисел.)
3. Натуральные числа x, y, z удовлетворяют условию $x^2 + y^2 = 2z^2$. Докажите, что число $(2z - x - y)(2z - x + y)/2$ является точным квадратом.
4. На сторонах AD , AB и BC прямоугольника $ABCD$ отмечены точки X , Y и Z соответственно. Докажите, что если $AX = CZ$, то $XY + YZ \geq AC$.
5. В школе организовали n ($n > 1$) кружков. Оказалось, что для любых двух школьников есть кружок, в который ходит ровно один из них, а для любых трёх школьников есть либо кружок, в который ходят все трое, либо кружок, в который не ходит ни один из них. Какое наибольшее количество учеников может быть в этой школе?
6. В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна боковой стороне CD . Прямая, симметричная прямой BD относительно AD , пересекает прямую AC в точке E . Докажите, что прямая AB делит отрезок DE пополам.
7. Пусть $d(n)$ — количество всех натуральных делителей числа n (включая 1 и n). Найдите все натуральные n , большие 2, для которых $2n = d(n)d(n-2)$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ»

Задача 1. По кругу стоят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Могло ли случиться, что каждый из них сказал: «Среди двоих, следующих за мной по часовой стрелке, есть лжец»?

Ответ. Не могло. **Решение.** Пусть такое случилось. Среди стоящих есть лжецы: если есть рыцарь, то один из двоих, следующих за ним, лжец. За лжецом следуют два рыцаря, за ними — снова лжец (иначе первый из рыцарей лжёт) и т.д.. Таким образом, все стоящие должны разбиваться на тройки ЛРР. Но число 100 не делится на 3.

Задача 2. Мама Пети и Васи испекла пирожки. Петя пришёл на кухню, съел сперва один, а потом четверть от всех оставшихся. Потом на кухню пришёл Вася, и тоже съел сперва один пирожок, а потом четверть от всех оставшихся. А потом на кухню пришла мама и обнаружила, что осталось больше 50, но меньше 60 пирожков. Сколько пирожков испекла мама? (Пирожки нельзя ломать — можно есть только целыми).

Ответ. 93 пирожка. **Решение.** Пусть мама обнаружила s пирожков. Тогда до прихода Васи их было $4s/3+1$, а первоначально — $4(4s/3+1)/3+1 = (16s+21)/9$ (*). Так как число $4s/3+1$ — целое, s должно делиться на 3. Между 50 и 60 на 3 делятся три числа: 51, 54 и 57. Подставляя их вместо s в выражение (*), находим, что целочисленный результат получается только при $s = 51$, и он равен 93.

Задача 3. Может ли не равное 0 произведение $Я \cdot Р \cdot О \cdot С \cdot Л \cdot А \cdot В \cdot Л \cdot Ъ$ делиться на нечётную сумму $Я+Р+О+С+Л+А+В+Л+Ъ$? Здесь одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными.

Ответ. Может. **Решение.** Так как в слове ЯРОСЛАВЛЬ 8 разных букв, из которых только Л встречается дважды, и при этом нет нуля, сумма $Я+Р+О+С+Л+А+В+Л+Ъ$ равна $(1+2+\dots+9)+Л-Н = 45+Л-Н$, где Н — отсутствующая цифра. При этом, чтобы сумма была нечётной, разность $Л-Н$ должна быть чётной. Подходят $Л = 7$, $Н = 3$: $45+7-3 = 49 = 7^2$, а в произведении $Я \cdot Р \cdot О \cdot С \cdot Л \cdot А \cdot В \cdot Л \cdot Ъ$ есть две семёрки. **Замечание.** Это единственная возможная пара Л и Н: очевидно, $37 \leq 45+Л-Н \leq 53$, среди нечётных чисел от 37 до 53 только 49 раскладывается на множители, меньшие 10, а двух семёрок в произведении $Я \cdot Р \cdot О \cdot С \cdot Л \cdot А \cdot В \cdot Л \cdot Ъ$ можно добиться, только положив $Л = 7$.

Задача 4. По окружности стоят числа 1, 2, ..., 12 (именно в таком порядке). Можно ли эту окружность разрезать на 4 части таким образом, чтобы суммы чисел, стоящих в этих частях, были равны четырём последовательным натуральным числам? (На каждой части расположены одно или несколько стоящих подряд по окружности чисел.)

Ответ. Нельзя. **Решение.** Пусть могли получиться суммы $n, n+1, n+2, n+3$. Решая уравнение $n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 1+2+\dots+12 = 78$, получаем $n = 18$, то есть суммы должны равняться 18, 19, 20 и 21. Так как $11+12 > 21$, один из разрезов должен проходить между числами 11 и 12. Тогда единственный вариант для числа 11 — это $11+10$. Но в таком случае варианта для числа 9 уже не находится, так как $9+8 < 18$, а $9+8+7 > 21$.

Задача 5. Найдите все натуральные числа n и k , для которых $10^{n+2}-10^n+2^k = 2014$.

Ответ. $n = 1, k = 10$. **Решение.** Проверкой убеждаемся, что $k = 1$ не подходит. При $k \geq 2$ и $n \geq 2$ левая часть уравнения делится на 4, а 2014 на 4 не делится. Значит, $n = 1$, и $2^k = 2014-1000+10 = 1024$, откуда $k = 10$.

Задача 6. Можно ли разрезать клетчатый квадрат размером 101×101 на квадраты из четырёх клеток и показанные на рисунке «уголки» из пяти клеток?



Ответ. Нельзя. **Решение.** Раскрасим все чётные вертикали квадрата в белый цвет, а все нечётные — в чёрный. Допустим, нам удалось разрезать квадрат 101×101 на указанные в условии фигуры. Тогда в каждом квадрате 2×2 чёрных и белых клеток будет поровну, а в каждом «уголке» будет четыре клетки одного цвета и одна — другого. Таким образом, разность между числом чёрных и белых клеток должна делиться на $4-1 = 3$. Но она равна 101. Противоречие.

Задача 7. На трибунах арены «Локомотив» собралось 2015 болельщиков. Могло ли так случиться, что для каждого неотрицательного целого k выполняется следующее свойство: если есть болельщик, знакомый ровно с k другими болельщиками, то есть ровно k болельщиков с таким свойством?

Ответ. Не могло. **Решение.** Пусть есть болельщики, знакомые с $k_1, k_2, \dots, k_n$ другими болельщиками. Тогда по условию $k_1+k_2+\dots+k_n = 2015$. Значит, в сумме $k_1+k_2+\dots+k_n$ должно быть нечётное количество нечётных слагаемых. Но тогда нечётна и сумма знакомств по всем болельщикам, равная $k_1 \cdot k_1 + k_2 \cdot k_2 + \dots + k_n \cdot k_n$. Но она, как известно, должна быть чётной.

Задача 8. В каждой клетке шахматной доски стоит натуральное число, причём все числа различны. За один ход можно изменить любое число. За какое наименьшее число ходов можно сделать так, что в каждой строке и в каждом столбце будет хотя бы по два равных числа?

Ответ. За 12 ходов. **Решение.** Заметим, что в каждой строке и каждом столбце мы должны изменить хотя бы по одному числу. Пусть хватило 11 ходов. Тогда есть по крайней мере пять строк, где изменяли ровно по одному числу, и каждое из этих изменений должно было дать пару равных чисел в своей строке. Поэтому числа, которые мы изменяли в этих строках, не могли породить двух равных чисел ни в одном столбце, а шести оставшихся чисел не хватает, чтобы добиться пары равных чисел в каждом из восьми столбцов. Итак, меньше, чем 12 числами, нам не обойтись. Чтобы обойтись ровно 12 числами, покроем одну из главных диагоналей доски четырьмя квадратами размером 2×2 клетки и изменим по три числа в каждом из них так, чтобы все числа в нём оказались одинаковыми.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ ЮНИОРОВ

Задача 1. По кругу стоят несколько (больше 100) человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал: «Среди ста человек, следующих за мной по часовой стрелке, не более одного лжеца». Докажите, что либо все стоящие по кругу — рыцари, либо все — лжецы.

Решение. Пусть среди стоящих есть как рыцари, так и лжецы. Тогда найдётся рыцарь Р, за которым по часовой стрелке идёт лжец Л. За этим лжецом по часовой стрелке должны идти 99 рыцарей, иначе Р лжёт. Но тогда Л говорит правду — противоречие.

Задача 2. По окружности стоят числа 1, 2, ..., 12 (именно в таком порядке). Можно ли эту окружность разрезать на 4 части таким образом, чтобы суммы чисел, стоящих в этих частях, были равны четырём последовательным натуральным числам? (На каждой части расположены одно или несколько стоящих подряд по окружности чисел.)

Ответ. Нельзя. **Решение.** Пусть могли получиться суммы $n, n+1, n+2, n+3$. Решая уравнение $n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 1+2+\dots+12 = 78$, получаем $n = 18$, то есть суммы должны равняться 18, 19, 20 и 21. Так как $11+12 > 21$, один из разрезов должен проходить между числами 11 и 12. Тогда единственный вариант для числа 11 — это $11+10$. Но в таком случае варианта для числа 9 уже не находится, так как $9+8 < 18$, а $9+8+7 > 21$.

Задача 3. Чему может равняться Л в ситуации, когда не равное 0 произведение $Я \cdot Р \cdot О \cdot С \cdot Л \cdot А \cdot В \cdot Л \cdot Б$ делится на нечётную сумму $Я+Р+О+С+Л+А+В+Л+Б$ (здесь одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными)?

Ответ. 7. **Решение.** Так как в слове ЯРОСЛАВЛЬ 8 разных букв, из которых только Л встречается дважды, и при этом нет нуля, сумма $Я+Р+О+С+Л+А+В+Л+Б$ равна $(1+2+\dots+9)+Л-Н = 45+Л-Н$, где Н — отсутствующая цифра. При этом, чтобы сумма была нечётной, разность $Л-Н$ должна быть чётной. Поэтому $37 \leq 45+Л-Н \leq 53$. Заметим, что среди нечётных чисел от 37 до 53 только $49 = 7^2$ раскладывается на множители, меньшие 10, а двух семёрок в произведении $Я \cdot Р \cdot О \cdot С \cdot Л \cdot А \cdot В \cdot Л \cdot Б$ можно добиться, только положив $Л = 7$.

Задача 4. Известно, что $a > b > 0$. Докажите неравенство $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} < \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$.

Решение. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} < \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} \Leftrightarrow (a-b)(a+b)^2(a^2-ab+b^2) < (a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)$. Деля обе части последнего неравенства на $a-b > 0$ и полагая $a^2+0,5ab+b^2 = c$, $0,5ab = d$, получаем равносильное неравенство $(c+3d)(c-3d) < (c+d)(c-d)$, сводящееся к очевидному $c^2-9d^2 < c^2-d^2$.

Задача 5. На трибунах арены «Локомотив» собралось 2015 болельщиков. Могло ли так случиться, что для каждого неотрицательного целого k выполняется следующее свойство: если есть болельщик, знакомый ровно с k другими болельщиками, то есть ровно k болельщиков с таким свойством?

Ответ. Не могло. **Решение.** Пусть есть болельщики, знакомые с $k_1, k_2, \dots, k_n$ другими болельщиками. Тогда по условию $k_1+k_2+\dots+k_n = 2015$. Значит, в сумме $k_1+k_2+\dots+k_n$ должно быть нечётное количество нечётных слагаемых. Но тогда нечётна и сумма знакомств по всем болельщикам, равная $k_1 \cdot k_1 + k_2 \cdot k_2 + \dots + k_n \cdot k_n$. Но она, как известно, должна быть чётной.

Задача 6. Решите в натуральных числах уравнение $2^k + 10^m - 10^n = 2014$.

Ответ. $k = 10, m = 3, n = 1$. **Решение.** Так как 2014 не делится на 4, наименьшее из чисел k, m, n должно равняться 1. $k = 1$ не подходит, так как $2014-2$ не делится на 10. Полагая $m = 1$, получаем уравнение $2^k - 10^n = 2004$. Тогда $2^k > 2004$, откуда $k \geq 11$. Но тогда $n < 3$, иначе $2^k - 10^n$ делится на 8, а 2004 на 8 не делится. С другой стороны, уже доказано, что $n > 1$. Значит, $n = 2$, но тогда получаем $2^k - 100 = 2004$, что невозможно при натуральном k . Наконец, положим $n = 1$. Тогда получаем уравнение $2^k + 10^m = 2024$, откуда 10^m равно либо 100, либо 1000, а 2^k , соответственно, либо 1924, либо 1024. Первое невозможно, второе даёт ответ.

Задача 7. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом 40° при вершине B . На сторонах BC, CA и AB отмечены точки D, E и F соответственно. Оказалось, что $AE = CD$ и $DE = BF$, $\angle BDE = \angle CEF = 100^\circ$. Найдите угол ABE .

Ответ. 15° . **Решение.** Так как $\angle EDC = \angle FEA = 80^\circ$, $\angle ECD = \angle FAE = 70^\circ$ и $AE = CD$, треугольники EPC и EFA равны, откуда $FE = DE = BF$. Значит, $\angle FBE = \angle FEB = (180^\circ - \angle BFE)/2 = (180^\circ - \angle FAE - \angle FEA)/2 = 30^\circ/2 = 15^\circ$.

Задача 8. В каждой клетке доски 100×100 стоит натуральное число, причём все числа различны. За один ход можно изменить любое число. За какое наименьшее число ходов можно сделать так, что в каждой строке и в каждом столбце будет хотя бы по два равных числа?

Ответ. За 150 ходов. **Решение.** Заметим, что в каждой строке и каждом столбце мы должны изменить хотя бы по одному числу. Пусть хватило 149 ходов. Тогда есть по крайней мере 51 строка, где изменяли ровно по одному числу (иначе изменений не меньше $100+50 = 150$), и каждое из этих изменений должно было дать пару равных чисел в своей строке. Поэтому числа, которые мы изменяли в этих строках, не могли породить двух равных чисел ни в одном столбце, а 99 оставшихся чисел не хватает, чтобы добиться пары равных чисел в каждом из 100 столбцов. Итак, меньше, чем 150 числами, нам не обойтись. Чтобы обойтись ровно 150 числами, покроем одну из главных диагоналей доски 50 квадратами размером 2×2 клетки и изменим по три числа в каждом из них так, чтобы все числа в нём оказались одинаковыми.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ СЕНЬОРОВ

Задача 1. Дано натуральное число n , большее 1 и меньшее 2014. По кругу стоят 2014 человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из стоящих сказал: «Среди n человек, следующих за мной по часовой стрелке, не более одного лжеца». Сколько лжецов могло быть среди стоящих?

Ответ. Либо 0, либо 2014. **Решение.** Случаи, когда все стоящие — рыцари и когда все стоящие — лжецы, очевидно, удовлетворяют условию задачи. Покажем, что других случаев, удовлетворяющих условию, не бывает. Действительно, пусть среди стоящих есть как рыцари, так и лжецы. Тогда найдётся рыцарь P , за которым по часовой стрелке идёт лжец L . За этим лжецом по часовой стрелке должен идти $n-1$ рыцарь, иначе P лжёт. Но тогда L говорит правду — противоречие.

Задача 2. По окружности стоят числа 1, 2, ..., 14 (именно в таком порядке). При каком наибольшем $k < 14$ эту окружность можно разрезать на k частей таким образом, чтобы суммы чисел, стоящих в этих частях, были равны k последовательным натуральным числам? (На каждой части расположены одно или несколько стоящих подряд по окружности чисел.)

Ответ. При $k = 10$. **Решение.** $1+2+\dots+14 = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Так как сумма 11 и 13 подряд идущих чисел делится на 11 и 13 соответственно, а сумма 12 подряд идущих чисел чётна, k не может равняться ни 11, ни 12, ни 13. Пример для $k = 10$: $1+2+3+4+5 = 15$, 14 , 13 , ..., 6 .

Задача 3. Натуральные числа x , y , z удовлетворяют условию $x^2+y^2 = 2z^2$. Докажите, что число $(2z-x-y)(2z-x+y)/2$ является точным квадратом.

Решение. $(2z-x-y)(2z-x+y)/2 = ((2z-x)^2-y^2)/2 = (4z^2-4xz+x^2-2z^2+y^2)/2 = z^2-2xz+x^2 = (z-x)^2$.

Задача 4. На сторонах AD , AB и BC прямоугольника $ABCD$ отмечены точки X , Y и Z соответственно. Докажите, что если $AX = CZ$, то $XY+YZ \geq AC$.

Решение. Построим параллелограмм $YZCK$. Тогда $YK \parallel ZC \parallel AX$ и $YK = ZC = AX$, то есть $AYKX$ — параллелограмм, а точнее — прямоугольник. Значит, $XY+YZ = AK+KC \geq AC$.

Задача 5. В школе организовали n ($n > 1$) кружков. Оказалось, что для любых двух школьников есть кружок, в который ходит ровно один из них, а для любых трёх школьников есть либо кружок, в который ходят все трое, либо кружок, в который не ходит ни один из них. Какое наибольшее количество учеников может быть в этой школе?

Ответ. 2^{n-1} . **Решение.** Пронумеруем кружки и сопоставим каждому ученику n -значное двоичное число, где в k -ом разряде стоит 0, если ученик не ходит в этот кружок, и 1, если ходит. Так как для любых двух школьников есть кружок, в который ходит ровно один из них, у разных школьников будут разные коды. Далее, разобьём коды на пары, где коды в каждой из пар не совпадают ни в одном разряде. Так как по условию у любых трёх сопоставленных школьникам кодов должен быть разряд, в котором все три совпадают, из каждой такой пары может быть использовано не больше одного кода. Поэтому школьников не больше, чем половина числа n -значных двоичных кодов, то есть не больше 2^{n-1} . Пример на 2^{n-1} : использованы в точности все коды, начинающиеся с 1.

Задача 6. В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна боковой стороне CD . Прямая, симметричная прямой BD относительно AD , пересекает прямую AC в точке E . Докажите, что прямая AB делит отрезок DE пополам.

Решение. Построим параллелограмм $EADK$. Заметим, что треугольники BCD и DAE подобны ($\angle CBD = \angle BDA = \angle ADE$, $\angle BCD = 180^\circ - \angle CDA = 180^\circ - \angle CAD = \angle DAE$). В треугольниках ABC и AKE углы ACB и AKE равны, а $BC:CA = BC:CD = DA:AE = KE:AE$. Значит, они подобны, и $\angle BAC = \angle KAE$, то есть точка A лежит на прямой BK . Таким образом, прямая BK содержит диагональ AK параллелограмма $EBDK$, и, следовательно, делит его вторую диагональ DE пополам.

Задача 7. Пусть $d(n)$ — количество всех натуральных делителей числа n (включая 1 и n). Найдите все натуральные n , большие 2, для которых $2n = d(n)d(n-2)$.

Ответ: $n = 6$, $n = 8$, $n = 12$. **Решение.** Все делители числа n разобьём на пары вида $\{a, n/a\}$, где $a \leq \sqrt{n}$. Аналогично поступим с делителями числа $n-2$. Поскольку числа n и $n-2$ не имеют общих делителей, кроме 1 и, возможно, 2, отсюда следует, что

$$d(n)+d(n-2) \leq 2[\sqrt{n}]+4 \text{ (так как 1 и, возможно, 2, а также их парные считаются дважды).}$$

По неравенству о средних отсюда следует, что $2n = d(n)d(n-2) \leq ([\sqrt{n}]+2)^2 \leq n+4[\sqrt{n}]+4$. Но $n > 4\sqrt{n}+4$ при $n > 16$, так как $n-4\sqrt{n}+4 = (\sqrt{n}-2)^2 > 8$ при $n \geq 24$. Осталось проверить числа от 1 до 23.