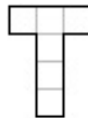


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2014

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Из трёх шестиклеточных букв Т (см. рис.) сложите фигуру, которую можно разрезать на три различных прямоугольника.



2. Перед Васей положили на два стола монеты на сумму 2014 рублей. Ему можно перевернуть все монеты на одном из столов и взять с обоих столов все монеты, лежащие орлом вверх. Он перевернул монеты на левом столе, и ему досталось 1000 рублей. А сколько денег досталось бы Васе, если бы он перевернул монеты на правом столе? Ответ объясните.

3. Петя и Вася играют на клетчатой доске 8×8 . Они ходят по очереди, начинает Петя. Он своим ходом ставит крестик на свободную клетку. Ответным ходом Вася кладёт на доску прямоугольник 1×7 , закрывая крестик. Прямоугольники не должны перекрываться и вылезать за пределы доски. Если Вася не может сделать ход (и только в этом случае), он платит Пете рубль, после чего ходит Петя. Игра заканчивается, когда свободных клеток не останется. Может ли Петя играть так, чтобы наверняка заработать не менее 25 рублей? Свободной считается клетка, которая не отмечена крестиком и не покрыта прямоугольником 1×7 .

4. Сумма нескольких натуральных слагаемых равна 2014. Докажите, что в записи этого равенства какая-то цифра встретилась более одного раза.

5. Пираты захватили 27 золотых слитков. Согласно надписям на слитках 9 из них весят по 1 унции, 9 — по 5 унций, 9 — по 10 унций. Стало известно, что ровно один из слитков — фальшивый, его вес меньше написанного. Матросы требуют немедленной выдачи своей доли, причём заведомо настоящими слитками. У капитана есть чашечные весы без гирь. Как только становится ясно, что какие-либо слитки — настоящие, их отдают матросам, и в дальнейших взвешиваниях эти слитки не участвуют. Может ли капитан наверняка выявить фальшивый слиток за 3 взвешивания?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2014

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Из четырёх одинаковых пятиклеточных фигур (см. рис.) сложите фигуру, которую можно разрезать на пять одинаковых четырёхклеточных фигур. Фигуры можно как угодно поворачивать и переворачивать. 
2. Сумма нескольких натуральных слагаемых равна 2014. Докажите, что в записи этого равенства какая-то цифра встретилась более одного раза.
3. Петя и Вася играют на клетчатой доске 15×15 . ходят по очереди, начинает Петя. Он своим ходом ставит крестик на свободную клетку. Ответным ходом Вася либо платит Пете рубль, либо кладёт на доску прямоугольник 1×7 , закрывая крестик. Прямоугольники не должны перекрываться и вылезать за пределы доски. В покрытую прямоугольником клетку ставить крестик нельзя. Игра заканчивается, когда свободных клеток не останется. Какую наибольшую сумму наверняка может заработать Петя?
4. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + x = x^2 + y^2$.
5. Что больше: число способов разложить 19 гирек с весами 1 г, 2 г, ..., 19 г на две чашки весов так, чтобы весы остались в равновесии, или число способов разложить так 20 гирек с весами 1 г, 2 г, ..., 20 г?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2014

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

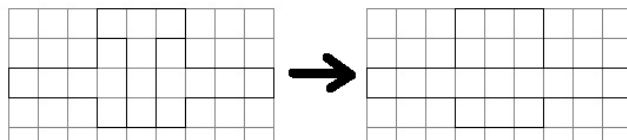
1. Атос играет в кости с англичанином. Они по очереди (начинает англичанин) бросают игральную кость, на которой выпадает от 1 до 6 очков. Атосу, утомлённому долгим сидением в погребке, не везёт: среди каждых трёх его последовательных бросков выпадает хотя бы одна двойка, а среди каждых пяти последовательных бросков — хотя бы одна единица. Наоборот, за каждые шесть последовательных бросков англичанин выбрасывает не менее четырёх шестёрок. Выигрывает тот, кто первым наберёт не менее 58 очков. Может ли Атос выиграть?
2. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) с углом $\angle CAD=30^\circ$. Длина диагонали BD равна длине средней линии трапеции. Найдите угол между диагоналями AC и BD .
3. Докажите, что не существует натуральных чисел $x > 1$ и y , для которых $(x^7-1)/(x-1) = y^5+1$.
4. В таблице 9×9 четыре клетки, находящиеся на пересечении второй и восьмой строк и второго и восьмого столбцов, окрашены в чёрный цвет; остальные клетки — белые. Какое наименьшее число белых клеток нужно ещё перекрасить в чёрный цвет так, чтобы никакие белые клетки не образовывали фигуру из пяти клеток вида  (как угодно повёрнутую)?
5. Что больше: число способов разложить 99 гирек с весами 1 г, 2 г, ..., 99 г на две чашки весов так, чтобы весы остались в равновесии, или число способов разложить так 100 гирек с весами 1 г, 2 г, ..., 100 г?

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. Из трёх шестиклеточных букв Т (см. рис.) сложите фигуру, которую можно разрезать на три различных прямоугольника.



Решение. Шляпками двух букв Т заполним пространство под шляпкой третьего. Получится клетчатый прямоугольник 4×3 , ко второму ряду клеток которого слева и справа пристроены прямоугольники 1×3 . Эту фигуру можно разрезать на прямоугольники 1×9 , 1×3 и 2×3 .



Задача 2. Перед Васей положили на два стола монеты на сумму 2014 рублей. Ему можно перевернуть все монеты на одном из столов и взять с обоих столов все монеты, лежащие орлом вверх. Он перевернул монеты на левом столе, и ему досталось 1000 рублей. А сколько денег досталось бы Васе, если бы он перевернул монеты на правом столе? Ответ объясните.

Ответ. 1014 рублей. **Решение.** Если перевернуть все монеты на левом столе, вверх орлом окажутся все монеты, которые лежали вверх решкой на левом столе, а также все монеты, которые лежали вверх орлом на правом столе. Если перевернуть все монеты на правом столе, вверх орлом окажутся все монеты, которые лежали вверх решкой на правом столе, а также все монеты, которые лежали вверх орлом на левом столе. Таким образом, во втором случае вверх орлом окажутся в точности те монеты, которые во первом случае будут лежать вверх решкой. Очевидно, таких монет $2014 - 1000 = 1014$.

Задача 3. Петя и Вася играют на клетчатой доске 8×8 . Они ходят по очереди, начинает Петя. Он своим ходом ставит крестик на свободную клетку. Ответным ходом Вася кладёт на доску прямоугольник 1×7 , закрывая крестик. Прямоугольники не должны перекрываться и вылезать за пределы доски. Если Вася не может сделать ход (и только в этом случае), он платит Пете рубль, после чего ходит Петя. Игра заканчивается, когда свободных клеток не останется. Может ли Петя играть так, чтобы наверняка заработать не менее 25 рублей? Свободной считаются клетка, которая не отмечена крестиком и не покрыта прямоугольником 1×7 .

Ответ. Может. **Решение.** Первым ходом Петя ставит крестик в угловую клетку. Вася вынужден класть свой прямоугольник в крайний ряд клеток. Следующим ходом Вася отмечает вторую угловую клетку в этом ряду и т.д., пока не будут отмечены все четыре угловые клетки. После этого все крайние клетки квадрата будут покрыты прямоугольниками, и Вася больше не сможет положить ни одного прямоугольника. Поэтому Петя сможет поставить крестики во все 36 свободных внутренних клеток доски и заработать 36 рублей.

Задача 4. Сумма нескольких натуральных слагаемых равна 2014. Докажите, что в записи этого равенства какая-то цифра встретилась более одного раза.

Решение. Допустим, что все цифры встречаются в записи нашего равенства не больше, чем по разу. Тогда в записи всех слагаемых не больше шести цифр, из которых в разряде сотен — не больше двух цифр, потому что за каждой из них стоят ещё две цифры в разрядах десятков и единиц. В разряде же тысяч цифр у слагаемых нет вообще, потому что самая маленькая из оставшихся цифр — тройка. Поэтому сумма в случае, когда все цифры в записи равенства различны, не превосходит $100 \cdot (9+8) + 10 \cdot (7+6+5+3) = 1910$, что меньше, чем 2014.

Задача 5. Пираты захватили 27 золотых слитков. Согласно надписям на слитках 9 из них весят по 1 унции, 9 — по 5 унций, 9 — по 10 унций. Стало известно, что ровно один из слитков — фальшивый, его вес меньше написанного. Матросы требуют немедленной выдачи своей доли, причём заведомо настоящими слитками. У капитана есть чашечные весы без гирь. Как только становится ясно, что какие-либо слитки — настоящие, их отдают матросам, и в дальнейших взвешиваниях эти слитки не участвуют. Может ли капитан наверняка выявить фальшивый слиток за 3 взвешивания?

Ответ. Может. **Решение.** Первым взвешиванием сравним 4 слитка с надписью 10 и 5 слитков с надписью 1 с 9 слитками с надписью 5. Если недовес выявится среди 9 слитков с надписью 5, дальше взвешиваем три из них с тремя другими, выявляем три слитка, среди которых есть фальшивый, последним взвешиванием сравниваем два из них и находим фальшивый. Если недовес выявится в группе из 4 слитков с надписью 10 и 5 слитков с надписью 1, следующим взвешиванием сравниваем $10+10+1$ с $10+10+1$. Если недовес в группе $10+10+1$, последним взвешиванием сравниваем 10 с 10 и находим фальшивый слиток, если же веса $10+10+1$ и $10+10+1$ равны, сравниваем два слитка их оставшейся группы $1+1+1$. Наконец, если при первом взвешивании весы были в равновесии, то фальшивый слиток в группе слитков, не лежащих на весах, где 5 слитков с надписью 10 и 4 слитка с надписью 1. Этот случай разбирается аналогично предыдущему.

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. Из четырёх одинаковых пятиклеточных фигур (см. рис.) сложите фигуру, которую можно разрезать на пять одинаковых четырёхклеточных фигур. Фигуры можно как угодно поворачивать и переворачивать.



Решение. К четырехклеточной фигурке в форме буквы Г нетрудно приложить четыре таких же фигурки, чтобы каждая из приложенных букв вместе с одной из клеток исходной буквы образовывала пятиклеточную фигуру, показанную на рисунке из условия.

Задача 2. Сумма нескольких натуральных слагаемых равна 2014. Докажите, что в записи этого равенства какая-то цифра встретилась более одного раза.

Решение. Допустим, что все цифры встречаются в записи нашего равенства не больше, чем по разу. Тогда в записи всех слагаемых не больше шести цифр, из которых в разряде сотен — не больше двух цифр, потому что за каждой из них стоят ещё две цифры в разрядах десятков и единиц. В разряде же тысяч цифр у слагаемых нет вообще, потому что самая маленькая из оставшихся цифр — тройка. Поэтому сумма в случае, когда все цифры в записи равенства различны, не превосходит $100 \cdot (9+8) + 10 \cdot (7+6+5+3) = 1910$, что меньше, чем 2014.

Задача 3. Петя и Вася играют на клетчатой доске 15×15 . ходят по очереди, начинает Петя. Он своим ходом ставит крестик на свободную клетку. Ответным ходом Вася либо платит Пете рубль, либо кладёт на доску прямоугольник 1×7 , закрывая крестик. Прямоугольники не должны перекрываться и вылезать за пределы доски. В покрытую прямоугольником клетку ставить крестик нельзя. Игра заканчивается, когда свободных клеток не останется. Какую наибольшую сумму наверняка может заработать Петя?

Ответ. 1 рубль. **Решение.** Заработать 1 рубль Петя сможет: 15^2 не делится на 7, и потому все Петины крестики Вася покрыть своими прямоугольниками не сможет. При этом если Вася разобьёт доску на 32 прямоугольника 1×7 и одну «особую» клетку, и всякий раз, когда Петя ходит не в «особую» клетку, будет выкладывать на доску соответствующий прямоугольник, Петя заработает ровно 1 рубль.

Задача 4. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + x = x^2 + y^2$.

Ответ. $x = y = 1$. **Решение.** $x^3 + x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 1) = y^2$. Поскольку числа x и $x^2 - x + 1$ взаимно просты, все простые множители входят в разложения обоих этих чисел в чётных степенях (иначе в разложении y^2 оказался бы простой множитель в нечетной степени), то есть $x^2 - x + 1 = z^2$ для некоторого натурального z . Но $x^2 \geq x^2 - x + 1 > (x-1)^2$ при всех натуральных x , причём равенство в левой части возможно только при $x = 1$. Поэтому $x = 1$, откуда и $y = 1$.

Задача 5. Что больше: число способов разложить 19 гирек с весами 1 г, 2 г, ..., 19 г на две чаши весов так, чтобы весы остались в равновесии, или число способов разложить так 20 гирек с весами 1 г, 2 г, ..., 20 г?

Ответ. Число способов разложить так 20 гирек. **Решение.** Пусть мы как-то разложили нужным образом гирьки весами от 1 до 19 г. Переложив на другую чашку весов гирьку весом 10 г и добавив туда, где она лежала, гирьку весом 20 г, мы снова получим равновесие. Таким образом, каждому способу разложить гирьки весами от 1 до 19 г сопоставляется способ разложить гирьки весами от 1 до 20 г, причём разным способам, очевидно, сопоставляются разные. Таким образом, способов разложить гирьки весами от 1 до 19 г не больше (на самом деле, как легко видеть, столько же), сколько способов разложить гирьки весами от 1 до 20 г так, чтобы гирьки весами 10 и 20 г лежали на разных чашках. Для завершения доказательства осталось заметить, что есть способы разложить гирьки весами от 1 до 20 г так, чтобы гирьки весами 10 и 20 г лежали на одной чашке, например, положить на одну чашку гирьки весами 20, 19, 18, 17, 16, 10, 5 г, а на другую — все остальные гирьки.

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. Атос играет в кости с англичанином. Они по очереди (начинает англичанин) бросают игральную кость, на которой выпадает от 1 до 6 очков. Атосу, утомлённому долгим сидением в погребке, не везёт: среди каждых трёх его последовательных бросков выпадает хотя бы одна двойка, а среди каждых пяти последовательных бросков — хотя бы одна единица. Наоборот, за каждые шесть последовательных бросков англичанин выбрасывает не менее четырёх шестёрок. Выигрывает тот, кто первым наберёт не менее 58 очков. Может ли Атос выиграть?

Ответ. Сможет. **Решение.** Пусть Атос за 14 бросков выкинул $6+6+2+6+1+2+6+6+2+1+6+2+6+6 = 58$, а англичанин — $1+1+6+6+6+6+1+1+6+6+6+6+1+1 = 54$. Тогда Атос победил.

Задача 2. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) с углом $\angle CAD = 30^\circ$. Длина диагонали BD равна длине средней линии трапеции. Найдите угол между диагоналями AC и BD .

Ответ. 90° . **Решение.** Продолжим сторону AD за точку D на отрезок $DE = BC$. $BDEC$ — параллелограмм, поэтому $CE \parallel BD$ и $CE = BD = (AD+BC)/2 = (AD+DE)/2 = AE/2$. Опустим из точки E перпендикуляр EF на прямую AC . В прямоугольном треугольнике AEF катет EF лежит против угла CAE , равного 30° . Поэтому $EF = AE/2 = EC$. Поскольку любая наклонная длиннее перпендикуляра, EC и есть перпендикуляр, и диагональ BD , параллельная EC , также перпендикулярна AC .

Задача 3. Докажите, что не существует натуральных чисел $x > 1$ и y , для которых $(x^7-1)/(x-1) = y^5+1$.

Решение. $(x^7-1)/(x-1) = y^5+1 \Leftrightarrow x(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = y^5+1$. Поскольку числа x и $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ взаимно просты, все простые множители входят в разложения обоих этих чисел в степени, кратных 5 (иначе в разложении y^5 оказался бы простой множитель в степени, не делящейся на 5), то есть $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = z^5$ для некоторого натурального z . Но $x^5 < x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 < (x+1)^5 = x^5+5x^4+10x^3+\dots$, откуда $x < z < x+1$, что невозможно.

Задача 4. В таблице 9×9 четыре клетки, находящиеся на пересечении второй и восьмой строк и второго и восьмого столбцов, окрашены в чёрный цвет; остальные клетки — белые. Какое наименьшее число белых клеток нужно ещё перекрасить в чёрный цвет так, чтобы никакие белые клетки не образовывали фигуру из пяти клеток вида  (как угодно повернутую)?

Ответ. 18. **Решение.** Разобьём таблицу на 9 квадратов 3×3 . Нетрудно показать, что в каждом таком квадрате должны быть закрашены по крайней мере две клетки, примыкающие к его границе. Так как все четыре уже закрашенные клетки являются в своих квадратах 3×3 центральными, нам придется дополнительно закрасить не менее 18 клеток. 18 клеток хватит, если закрасить все незакрашенные клетки двух диагоналей длины 3 и двух диагоналей длины 7, параллельных между собой.

Задача 5. Что больше: число способов разложить 99 гирек с весами 1 г, 2 г, ..., 99 г на две чашки весов так, чтобы весы остались в равновесии, или число способов разложить так 100 гирек с весами 1 г, 2 г, ..., 100 г?

Ответ. Число способов разложить так 100 гирек. **Решение.** Пусть мы как-то разложили нужным образом гирьки весами от 1 до 99 г. Переложив на другую чашку весов гирьку весом 50 г и добавив туда, где она лежала, гирьку весом 100 г, мы снова получим равновесие. Таким образом, каждому способу разложить гирьки весами от 1 до 99 г сопоставляется способ разложить гирьки весами от 1 до 100 г, причём разным способам, очевидно, сопоставляются разные. Таким образом, способов разложить гирьки весами от 1 до 99 г не больше (на самом деле, как легко видеть, столько же), сколько способов разложить гирьки весами от 1 до 100 г так, чтобы гирьки весами 50 и 100 г лежали на разных чашках. Для завершения доказательства осталось заметить, что есть способ разложить гирьки весами от 1 до 100 г так, чтобы гирьки весами 50 и 100 г лежали на одной чашке. Например, можно положить на одну чашку гирьки весами от 1 до 26 и от 77 до 100 г, а также гирьку весом 50 г, а на другую — все остальные гирьки.