XLI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2013

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2013

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Две семьи (в каждой папа, мама и сын) хотят переправиться через реку. Есть двухместная лодка. Грести могут только папы. Никакую из женщин нельзя оставлять на берегу одну. Сыновья могут быть на берегу или в лодке только вместе с кем-нибудь из своих родителей. Как им всем переправиться на другой берег?

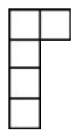
2. Перед Малышом и Карлсоном — по кучке орехов, всего 60 орехов. Сначала Карлсон съел у себя 3 ореха, а половину оставшихся отдал Малышу. Потом Малыш съел у себя 3 ореха и отдал половину остатка Карлсону. Теперь у Карлсона столько же орехов, сколько вначале. Сколько?

3. По кругу стоят несколько рыцарей и лжецов, все они разного роста. Каждый из стоящих произнёс фразу: «Я выше ровно одного из своих соседей». Могло ли среди стоящих по кругу быть ровно 2013 лжецов? (Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут).

4. На бал пришли 30 юношей и 30 девушек. После вечера танцев оказалось, что все юноши танцевали с одним и тем же количеством девушек, а девушка Оля танцевала ровно с 15 юношами. Докажите, что какие-то две девушки танцевали с одним и тем же количеством юношей.

5. Сколько существует таких трёхзначных чисел $\overline{ABC}$, не делящихся на 10, что как число $\overline{ABCABC}$, так и число $\overline{CBACBA}$ делятся на 49?

6. Какое наименьшее количество клеток надо вырезать из клетчатого квадрата 20×20 так, чтобы нельзя было вырезать по клеточкам ни одного Г-пентамино? (См. рис. справа; фигуру можно поворачивать и переворачивать)



7. На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, соблюдая такие правила: 1) никакие два отрезка не пересекаются (даже в концах); 2) концы каждого отрезка — разного цвета.

XLI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2013

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2013

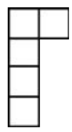
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Перед Малышом и Карлсоном — по кучке орехов, всего 60 орехов. Сначала Карлсон съел у себя 3 ореха, а половину оставшихся отдал Малышу. Потом Малыш съел у себя 3 ореха и отдал половину остатка Карлсону. Теперь у Карлсона столько же орехов, сколько вначале. Сколько?

2. Найдите все такие пары целых чисел a и b, не равных 0, что $a(a–b) = b$.

3. На бал пришли 30 юношей и 30 девушек. После вечера танцев оказалось, что все юноши танцевали с одним и тем же количеством девушек, а девушка Оля танцевала ровно с 15 юношами. Докажите, что какие-то две девушки танцевали с одним и тем же количеством юношей.

4. Какое наименьшее количество клеток надо вырезать из клетчатого квадрата 20×20 так, чтобы нельзя было вырезать по клеточкам ни одного Г-пентамино? (См. рис. справа; фигуру можно поворачивать и переворачивать)



5. Отрезки AD и CE — биссектрисы углов треугольника ABC (точка D лежит на стороне BC, а точка E лежит на стороне AB). Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из B на отрезки AD и CE соответственно. Докажите, что если $BK = BM$, то треугольник ABC равнобедренный.

6. Для любых целых чисел x, y и z, удовлетворяющих условию $x < y < z$, докажите неравенство $x^2–y^2+z^2 \geq (x–y+z)^2+2$.

7. На окружности отмечена 101 точка, а также центр окружности. Изначально во всех отмеченных точках стоят нули. За одну операцию можно прибавить по 1 ко всем числам на окружности или вычесть по 1 из всех этих чисел. Кроме того, можно выбрать любые два числа, стоящие на окружности рядом, и прибавить по 1 к ним и числу в центре окружности, либо вычесть по 1 из трех этих чисел. Можно ли в результате таких операций сделать все числа равными 2013?

8. 2013 человек разбиты на $k \leq 2013$ непустых групп с номерами от 1 до k. Докажите, что можно раздать им 2013^2 конфет так, чтобы в каждой группе все получили поровну конфет, а член группы с большим номером всегда получал больше, чем член группы с меньшим номером.

XLI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2013

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2013

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Дано натуральное $n > 4$. Докажите, что можно разрезать какой-нибудь прямоугольник на n меньших прямоугольников, никакие два из которых вместе не составляют прямоугольника (то есть не имеют двух общих вершин).

2. Найдите все такие пары целых чисел a и b, что $a(a-b) = b$.

3. Отрезки AD и CE — биссектрисы углов треугольника ABC (точка D лежит на стороне BC, а точка E лежит на стороне AB). Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из B на прямые AD и CE соответственно. Докажите, что если $BK = BM$, то треугольник ABC равнобедренный.

4. Шахматная ладья обошла все клетки доски $n \times n$ (некоторые клетки она могла посетить несколько раз, конец её пути не обязательно совпадает с началом). Найдите наименьшее возможное количество поворотов на прямой угол такого пути ладьи.

5. Для любых целых чисел x, y и z, удовлетворяющих условию $x < y < z$, докажите неравенство $x^2-y^2+z^2 \geq (x-y+z)^2+2$.

6. На столе лежат 2013 монет достоинством в 2, 5, 10, 25 и 50 коп. Два игрока, располагающие неограниченным запасом монет по 1, 2, 5, 10 и 25 коп., делают ходы по очереди. Каждый игрок своим ходом убирает одну из лежащих на столе монет, а взамен кладет на стол любые монеты меньшего достоинства, составляющие в сумме достоинство убранной монеты. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?

7. n человек разбиты на $k \leq n$ непустых групп с номерами от 1 до k. Докажите, что можно раздать им n^2 конфет так, чтобы в каждой группе все получили поровну конфет, а член группы с большим номером всегда получал больше, чем член группы с меньшим номером.

8. Точки P, Q и R лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно треугольника ABC так, что $AR = RP = PC$ и $BR = RQ = QC$. Докажите, что $AC+BC = 2AB$.

XLI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2013

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Две семьи (в каждой папа, мама и сын) хотят переправиться через реку. Есть двухместная лодка. Грести могут только папы. Никакую из женщин нельзя оставлять на берегу одну. Сыновья могут быть на берегу или в лодке только вместе с кем-нибудь из своих родителей. Как им всем переправиться на другой берег?*

Решение. Пусть в одной семье папа Андрей, мама Аня и сын Антон, а в другой — папа Витя, мама Валя и сын Вася. Сначала переправятся Андрей с Витей. В лодке с того берега вернется Витя, перевезет Аню, потом на исходный берег вернется Андрей, перевезет Антона, потом они с Витей вдвоем уплывут на исходный берег. Далее Андрей перевозит Валю, возвращается, Витя перевозит Васю, возвращается, и они вдвоем с Андреем завершают переправу.

Задача 2. *Перед Малышом и Карлсоном – по кучке орехов, всего 60 орехов. Сначала Карлсон съел у себя 3 ореха, а половину оставшихся отдал Малышу. Потом Малыш съел у себя 3 ореха и отдал половину остатка Карлсону. Теперь у Карлсона столько же орехов, сколько вначале. Сколько?*

Ответ. 35 орехов. **Решение**. Чтобы восстановить число орехов у Карлсона, Малыш отдал Карлсону на 3 ореха больше, чем получил от него (Карлсон же еще 3 съел). Пусть Карлсон дал ему горсть, получил горсть плюс 3 и у Малыша осталась горсть плюс 3. Итого в трех горстях 60–6–6 = 48 орехов (6 съели и по 3 лишних у Малыша и Карлсона). Значит, в горсти 16 орехов, у Карлсона две горсти и еще 3, то есть 35 орехов.

Задача 3. *По кругу стоят несколько рыцарей и лжецов, все они разного роста. Каждый из стоящих произнёс фразу: «Я выше ровно одного из своих соседей». Могло ли среди стоящих по кругу быть ровно 2013 лжецов? (Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут).*

Ответ. Нет. **Решение**. Лгут «карлики» — те, кто ниже обоих соседей, и «гиганты» — те, кто выше обоих соседей. Легко видеть, что карлики и гиганты в кругу чередуются, поэтому вместе их четное число.

Задача 4. *На бал пришли 30 юношей и 30 девушек. После вечера танцев оказалось, что все юноши танцевали с одним и тем же количеством девушек, а девушка Оля танцевала ровно с 15 юношами. Докажите, что какие-то две девушки танцевали с одним и тем же количеством юношей.*

Решение. Отметим мальчиков синими точками, девочек — красными, а тех, кто танцевал друг с другом, соединим линиями. По условию из всех синих точек выходит поровну линий, и потому общее число линий делится на 30. Из красных точек может выходить 0, 1, …, 29, 30 линий. Заметим, что $0+1+\ldots+29+30 = 15\cdot31$. Чтобы не нашлось двух девочек, танцевавших с одним и тем же количеством юношей, надо вычесть из этой суммы число от 0 до 30 так, чтобы разность разделилась на 30. Но единственное подходящее для этого число 15 по условию вычесть нельзя.

Задача 5. *Сколько существует таких трёхзначных чисел $\overline{ABC}$, не делящихся на 10, что как число $\overline{ABCABC}$, так и число $\overline{CBACBA}$ делятся на 49?*

Ответ. 16. **Решение**. $\overline{ABCABC} = \overline{ABC}\cdot1001 = \overline{ABC}\cdot7\cdot11\cdot13$. Тем самым число $\overline{ABCABC}$ делится на 49 тогда и только тогда, когда число $\overline{ABC}$ делится на 7. Аналогично, число $\overline{CBACBA}$ делится на 49 тогда и только тогда, когда число $\overline{CBA}$ делится на 7. Делимость на 7 чисел $\overline{ABC}$ и $\overline{CBA}$ равносильна делимости на 7 чисел $\overline{ABC}$ и $\overline{ABC} - \overline{CBA} = 99(A–C)$, то есть чисел $\overline{ABC}$ и $A–C$. Заметим, что число $\overline{ABC} = 100A+10B+C = 98A+2(A–C) +3(B+C)$ в этом случае делится на 7 тогда и только тогда, когда на 7 делится сумма $B+C$.

Итак, задача свелась к вопросу, сколькими способами можно выбрать цифры A, B и C, причем цифры A и C — не нули, чтобы на 7 делились разность $A–C$ и сумма $B+C$. Перебирая значения C от 1 до 9, получаем все 16 искомых чисел $\overline{ABC}$: 161, 861, 252, 952, 343, 434, 525, 595, 616, 686, 707, 777, 168, 868, 259, 959.

Задача 6. *Какое наименьшее количество клеток надо вырезать из клетчатого квадрата 20×20 так, чтобы нельзя было вырезать по клеточкам ни одного Г-пентамино?*

Ответ. 100. **Решение**. Пронумеруем строки квадрата по порядку числами от 1 до 20, столбцы — тоже, и вырежем те клетки, у которых сумма номеров строки и столбца делится на 4. Тогда среди любых 4 клеток, идущих в строке или столбце подряд, будет вырезанная, и нам не удастся вырезать даже прямоугольник 1×4. Чтобы доказать, что меньше, чем 100 клетками, обойтись не удастся, разделим квадрат 20×20 на 50 прямоугольников 4×2. Если вырезано меньше 100 клеточек, в каком-то из этих прямоугольников будет вырезано не больше одной клеточки, и из него мы сможем вырезать Г-пентамино.

Задача 7. *На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, соблюдая такие правила: 1) никакие два отрезка не пересекаются (даже в концах); 2) концы каждого отрезка — разного цвета.*

Решение. Будем проводить отрезки по очереди. Первым соединим две разноцветные точки, между которыми нет других точек (такие, очевидно, найдутся). Эти две точки и соединяющий их отрезок дальше не смогут ничему помешать. Забудем про них. Каждым следующим шагом будем соединять точку, выкрашенную в тот цвет А, которого осталось больше, чем каждого из двух других (если точек двух или трех таких цветов поровну, берем любой из них) с соседней (без учета забытых точек) точкой другого цвета и забывать про две соединенные точки. Заметим, что количество точек цвета А уменьшается на 1, а суммарное количество всех точек — на 2. Докажем, что такими операциями мы в конце концов уберем все точки. Действительно, в противном случае в какой-то момент останутся только точки цвета А, и их будет хотя бы две. Тогда до этого каждым ходом убиралась точка этого цвета, поскольку их всё время было больше всего. Но тогда и вначале этого цвета должно больше, чем остальных цветов, а это не так. Поэтому мы сумеем провести все 150 отрезков.

XLI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2013

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Перед Малышом и Карлсоном – по кучке орехов, всего 60 орехов. Сначала Карлсон съел у себя 3 ореха, а половину оставшихся отдал Малышу. Потом Малыш съел у себя 3 ореха и отдал половину остатка Карлсону. Теперь у Карлсона столько же орехов, сколько вначале. Сколько?*

Ответ. 35 орехов. **Решение**. Чтобы восстановить число орехов у Карлсона, Малыш отдал Карлсону на 3 ореха больше, чем получил от него (Карлсон же еще 3 съел). Пусть Карлсон дал ему горсть, получил горсть плюс 3 и у Малыша осталась горсть плюс 3. Итого в трех горстях 60–6–6 = 48 орехов (6 съели и по 3 лишних у Малыша и Карлсона). Значит, в горсти 16 орехов, у Карлсона две горсти и еще 3, то есть 35 орехов.

Задача 2. *Найдите все такие пары целых чисел a и b, не равных 0, что* $a(a-b) = b$.

Ответ. $a = -2$, $b = -4$. **Решение**. Поскольку b делится на a, $b = ac$. Подставляя, получаем $a^2(1-c) = ac \Leftrightarrow a(1-c) = c \Leftrightarrow (a+1)(1-c) = 1 \Leftrightarrow a+1 = 1$ и $1-c = 1$ или $a+1 = -1$ и $1-c = -1$ $\Leftrightarrow a = c = 0$ или $a = -2$, $c = 2$. $a = c = 0$ не удовлетворяет условию, $a = -2$, $c = 2$ дает ответ.

Задача 3. *На бал пришли 30 юношей и 30 девушек. После вечера танцев оказалось, что все юноши танцевали с одним и тем же количеством девушек, а девушка Оля танцевала ровно с 15 юношами. Докажите, что какие-то две девушки танцевали с одним и тем же количеством юношей.*

Решение. Отметим мальчиков синими точками, девочек — красными, а тех, кто танцевал друг с другом, соединим линиями. По условию из всех синих точек выходит поровну линий, и потому общее число линий делится на 30. Из красных точек может выходить 0, 1, …, 29, 30 линий. Заметим, что $0+1+\ldots+29+30 = 15\cdot31$. Чтобы не нашлось двух девочек, танцевавших с одним и тем же количеством юношей, надо вычесть из этой суммы число от 0 до 30 так, чтобы разность разделилась на 30. Но единственное подходящее для этого число 15 по условию вычесть нельзя.

Задача 4. *Какое наименьшее количество клеток надо вырезать из клетчатого квадрата 20×20 так, чтобы нельзя было вырезать по клеточкам ни одного Г-пентамино?*

Ответ. 100. **Решение**. Пронумеруем строки квадрата по порядку числами от 1 до 20, столбцы — тоже, и вырежем те клетки, у которых сумма номеров строки и столбца делится на 4. Тогда среди любых 4 клеток, идущих в строке или столбце подряд, будет вырезанная, и нам не удастся вырезать даже прямоугольник 1×4. Чтобы доказать, что меньше, чем 100 клетками, обойтись не удастся, разделим квадрат 20×20 на 50 прямоугольников 4×2. Если вырезано меньше 100 клеточек, в каком-то из этих прямоугольников будет вырезано не больше одной клеточки, и из него мы сможем вырезать Г-пентамино.

Задача 5. *Отрезки AD и CE — биссектрисы углов треугольника ABC (точка D лежит на стороне BC, а точка E лежит на стороне AB). Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из B на отрезки AD и CE соответственно. Докажите, что если BK = BM, то треугольник ABC равнобедренный.*

Решение. Отразим точку B симметрично относительно прямых AD и CE. Поскольку AD и CE — биссектрисы углов CAB и ACB соответственно, получившиеся точки X и Y лежат на прямой AC. При этом $BX = 2BK = 2BM = BY$, следовательно, $\angle XYB = \angle YXB$.

Кроме того, $AX = AB$, $CY = CB$, поэтому $\angle YXB = \angle AXB = \angle ABX$, а $\angle XYB = \angle CYB = \angle CBY$. Тогда $\angle XAB = 180°–2\angle AXB = 180°–2\angle CYB = \angle YCB$. Таким образом, в треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, что и требовалось доказать.

Задача 6. *Для любых целых чисел x, y и z, удовлетворяющих условию $x < y < z$, докажите неравенство $x^2–y^2+z^2 \geq (x–y+z)^2+2$.*

Решение. Раскроем скобки в правой части, приведем подобные члены, поделим на 2 и соберем в правой части все члены неравенства, кроме 1. Получим неравенство $xy+yz–y^2–xz \geq 1 \Leftrightarrow (x–y)(y–z) \geq 1$. По условию обе скобки в правой части отрицательны и по модулю не меньше 1, откуда и вытекает последнее неравенство.

Задача 7. *На окружности отмечена 101 точка, а также центр окружности. Изначально во всех отмеченных точках стоят нули. За одну операцию можно прибавить по 1 ко всем числам на окружности или вычесть по 1 из всех этих чисел. Кроме того, можно выбрать любые два числа, стоящие на окружности рядом, и прибавить по 1 к ним и числу в центре окружности, либо вычесть по 1 из трех этих чисел. Можно ли в результате таких операций сделать все числа равными 2013?*

Ответ. Нельзя. **Решение**. Пусть можно. Тогда мы прибавляли единицу к центрального числу на 2013 раз больше, чем вычитали. В итоге за счет операций, в которых участвовало центральное число, сумма чисел на окружности выросла на 4026. За счет же операций, в которых центральное число не участвовало, сумма чисел на окружности изменилась на число, кратное 101. Заметим, что в итоге мы хотим получить сумму $2013\cdot101$, также кратную 101. Но число 4026 не делится на 101. Противоречие.

Задача 8. *2013 человек разбиты на $k \leq 2013$ непустых групп с номерами от 1 до k. Докажите, что можно раздать им 2013^2 конфет так, чтобы в каждой группе все получили поровну конфет, а член группы с большим номером всегда получал больше, чем член группы с меньшим номером.*

Решение. Пусть a_i — количество человек в i-той группе. Тогда $a_1+a_2+\ldots+a_k = 2013$. Возведя обе части равенства в квадрат, раскроем скобки и сгруппируем все члены, где есть a_k. Получим

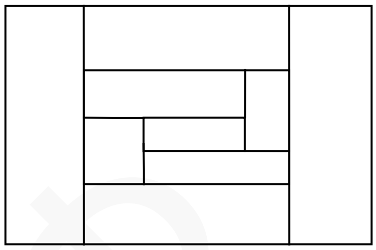
$$a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2+2a_1a_2+\ldots+2a_{k-2}a_{k-1}+a_k(a_k+2a_1+2a_2+\ldots+2a_{k-1}) = 2013^2.$$

Теперь сгруппируем все еще не использовавшиеся слагаемые, содержащие a_{k-1} и т. д. В итоге получим $a_1 \times a_1 + a_2(a_2+2a_1)+\ldots+a_k(a_k+2a_1+2a_2+\ldots+2a_{k-1})$. Дадим i-ой группе столько конфет, чему равно выражение в скобке, умножаемой на a_i. Очевидно, выражение в i-той скобке на a_i+a_{i-1} больше, чем в $(i–1)$-й, а сумма равна 2013^2.

XLI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2013

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Дано натуральное $n > 4$. Докажите, что можно разрезать какой-нибудь прямоугольник на n меньших прямоугольников, никакие два из которых вместе не составляют прямоугольника (то есть не имеют двух общих вершин).*



Решение. Заметим, что данная конструкция из 9 прямоугольников подходит, кроме того, в ней можно убрать правый, левый прямоугольники, тогда получатся конструкции из 8 и 7 прямоугольников. Если после этого убрать верхний и нижний, то останутся конструкции из 6 и 5 прямоугольников. Теперь к этой конструкции можно добавлять по одному прямоугольнику сверху и снизу, так как верхняя и нижняя сторона разбиты. Затем будут разбиты левая и правая сторона, поэтому можно прибавить по одному слева и справа, и вновь получим, что верхняя и нижняя стороны разбиты. Продолжая этот процесс, получаем любое возможное количество прямоугольников, начиная с 5.

Задача 2. *Найдите все такие пары целых чисел a и b, что $a(a–b) = b$.*

Ответ. $a = b = 0$ или $a = –2$, $b = –4$. **Решение**. Если $a = 0$, то $b = 0$, и наоборот. Далее считаем, что a и b не равны 0. Поскольку b делится на a, $b = ac$. Подставляя, получаем $a^2(1–c) = ac \Leftrightarrow a(1–c) = c \Leftrightarrow (a+1)(1–c) = 1 \Leftrightarrow a+1 = 1$ и $1–c = 1$ или $a+1 = –1$ и $1–c = –1$ $\Leftrightarrow a = c = 0$ или $a = –2$, $c = 2$, откуда получаем второй ответ.

Задача 3. *Отрезки AD и CE — биссектрисы углов треугольника ABC (точка D лежит на стороне BC, а точка E лежит на стороне AB). Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из B на прямые AD и CE соответственно. Докажите, что если $BK = BM$, то треугольник ABC равнобедренный.*

Первое решение. Пусть биссектрисы AD и CE пересекаются в точке I. Поскольку точка B равноудалена от прямых AK и CM, прямая BI делит пополам углы KOM и COA. Она же делит пополам угол CBA. Поэтому треугольники BDI и BEI равны, откуда $BD = BE$ (*). По свойству биссектрисы $BD/DC = AB/AC$, $BE/EA = BC/AC$. Деля первое равенство на второе и используя равенство (*), получаем, что $EA/DC = AB/BC$, откуда $EA(BD+DC) = DC(EA+DC) \Rightarrow EA = CD \Rightarrow AB = BC$. **Второе решение**. Отразим точку B симметрично относительно прямых AD и CE. Поскольку AD и CE — биссектрисы углов CAB и ACB соответственно, получившиеся точки X и Y лежат на прямой AC. При этом $BX = 2BK = 2BM = BY$, следовательно, $\angle XYB = \angle YXB$. Кроме того, $AX = AB$, $CY = CB$, поэтому $\angle YXB = \angle AXB = \angle ABX$, а $\angle XYB = \angle CYB = \angle CBY$. Тогда $\angle XAB = 180°–2\angle AXB = 180°–2\angle CYB = \angle YCB$. Таким образом, в треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, что и требовалось доказать.

Задача 4. *Шахматная ладья обошла все клетки доски $n\times n$ (некоторые клетки она могла посетить несколько раз, конец её пути не обязательно совпадает с началом). Найдите наименьшее возможное количество поворотов на прямой угол такого пути ладьи.*

Ответ. $2n–2$. **Решение**. Оценка. Пусть есть вертикаль, которую ладья только пересекала. Тогда она делала это n раз, и между каждыми двумя соседними пересечениями поворачивала под прямым углом минимум дважды, то есть поворотов было минимум $2n–2$. То же, если есть такая горизонталь. Если же ладья ходила по каждой горизонтали и каждой вертикали, она переходила от движения по горизонтали к движению по вертикали минимум $2n–1$ раз. Пример на $2n–2$ поворота очевиден.

Задача 5. *Для любых целых чисел x, y и z, удовлетворяющих условию $x < y < z$, докажите неравенство $x^2–y^2+z^2 \geq (x–y+z)^2+2$.*

Решение. Раскроем скобки в правой части, приведем подобные члены, поделим на 2 и соберем в правой части все члены неравенства, кроме 1. Получим неравенство $xy+yz–y^2–xz \geq 1 \Leftrightarrow (x–y)(y–z) \geq 1$. По условию обе скобки в правой части отрицательны и по модулю не меньше 1, откуда и вытекает последнее неравенство.

Задача 6. *На столе лежат 2013 монет достоинством в 2, 5, 10, 25 и 50 коп. Два игрока, располагающие неограниченным запасом монет по 1, 2, 5, 10 и 25 коп., делают ходы по очереди. Каждый игрок своим ходом убирает одну из лежащих на столе монет, а взамен кладет на стол любые монеты меньшего достоинства, составляющие в сумме достоинство убранной монеты. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?*

Ответ. Первый. **Решение**. Поскольку общее число всех монет нечетно, найдется достоинство, монет которого на столе — нечетное число. Пусть первый первым ходом возьмет монету старшего из таких достоинств и разменяет ее так, чтобы монет всех меньших достоинств, не считая копеек, на столе было четное число. Это возможно, потому что $50 > 25+10+5+2$, $25 > 10+5+2$, $10 > 5+2$. После этого на каждый размен, сделанный вторым, первый может ответить таким же разменом, и поэтому у него всегда будет ход. Поскольку игра конечна (общее число монет на столе с каждым ходом растет и не может быть больше суммы достоинств всех монет), второй проиграет.

Задача 7. *n человек разбиты на $k \leq n$ непустых групп с номерами от 1 до k. Докажите, что можно раздать им n^2 конфет так, чтобы в каждой группе все получили поровну конфет, а член группы с большим номером всегда получал больше, чем член группы с меньшим номером.*

Решение. Пусть a_i — количество людей в i-той группе. Тогда $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$. Возведя обе части равенства в квадрат, раскроем скобки и сгруппируем все члены, где есть a_k. Получим $a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2+2a_1a_2+\ldots+2a_{k-2}a_{k-1}+a_k(a_k+2a_1+2a_2+\ldots+2a_{k-1})=n^2$. Теперь сгруппируем все еще не использовавшиеся слагаемые, содержащие $a_{k–1}$ и так далее. В итоге получим $a_1 \times a_1+a_2(a_2+2a_1)+\ldots+a_k(a_k+2a_1+2a_2+\ldots+2a_{k-1})$. Дадим i-той группе столько конфет, чему равно выражение в скобке, умножаемой на a_i. Очевидно, что выражение в i-той скобке на $a_i+a_{i–1}$ больше, чем в $(i–1)$-й, а сумма равна n^2.

Задача 8. *Точки P, Q и R лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно треугольника ABC так, что $AR = RP = PC$ и $BR = RQ = QC$. Докажите, что $AC+BC = 2AB$.*

Решение. Проведем через точку R прямую, параллельную PQ. Пусть она пересекает прямую BC в точке S, а прямую AC — в точке T. Пусть M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B соответственно на прямую ST. Заметим, что из подобия треугольников BNR и AMR получаем, что $BN/AM = BR/AR$. Так как треугольники PCR и QCR — равнобедренные с основанием CR, то прямая PQ, а, значит, и прямая ST перпендикулярна CR, поэтому CR параллельна BN. Отсюда получаем, что $BS/SC = BN/CR$ и $AT/CT = AM/CR$. Поделим эти два равенства друг на друга и получим, что $BS/AT = (BN \times SC)/(AM \times CT) = (BN/AM) \times (SC/CT) = (BR/AR) \times (CP/CQ) = 1$, откуда $BS = AT$. Так как PQ параллельна ST и пересекает CR точно посередине, PQ — средняя линия в треугольнике SCT. Получаем, что $SC = 2PC$, $CT = 2CQ$, $BC= SC+BS$,

$AC = TC—AT$, или же $BC = SC–BS$, $AC = TC+AT$, в любом случае $SC+CT= BC+AC = 2PC+2CQ = 2(BR+AR)= 2AB$.