XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 19.02.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. Петя очень любит числа, которые записываются с помощью нескольких (более одной) одинаковых цифр (например, 11, 333, 9999 и др.). Как Пете с помощью трех любимых чисел и двух знаков вычитания получить число 2012?

2. На острове, где обитают только рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут, прошла финансовая реформа, в результате которой правительство отобрало часть денег у некоторых жителей и раздало их остальным, но не более, чем по 100 тугриков каждому. После реформы каждый житель сообщил, что потерял в результате реформы более 100 тугриков. Докажите, что лжецов на острове больше, чем рыцарей.

3. В течение суток десятеро ребят посетили библиотеку, а один из них посетил ее даже дважды. Оказалось, что любые двое ребят встретились в библиотеке. Можно ли с уверенностью утверждать, что в какой-то момент они все находились в библиотеке?

4. Дано четырехзначное число из различных ненулевых цифр. У него поменяли местами первую и последнюю цифры и прибавили получившееся число к исходному. Оказалось, что полученная сумма делится на 91. Докажите, что исходное число не делится на 91.

5. В некоторой стране 100 городов. Любые два города этой страны соединены дорогой. От этой страны отделилась независимая республика, причем количество дорог, соединяющих города этой республики, равно количеству дорог, ведущих из республики в остальные города этой страны. Сколько городов в отделившейся республике? (Приведите все варианты и докажите, что других нет).

6. На шахматной доске расставлено несколько ладей. В какое наименьшее число цветов заведомо можно раскрасить этих ладей, чтобы никакие две одноцветные ладьи не били друг друга? (Ладьи не бьют друг сквозь друга).

7. Четыре целых числа таковы, что сумма любых трех из них положительна. Докажите, что упятеренная сумма этих чисел больше суммы их модулей.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 19.02.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. В течение суток десять ребят посетили библиотеку: девять человек по одному разу, а один − дважды. Оказалось, что любые двое ребят встретились в библиотеке. Верно ли, что в какой-то момент они все находились в библиотеке?

2. На острове, где обитают только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, прошла финансовая реформа. В результате этой реформы правительство отобрало часть денег у некоторых жителей и раздало их остальным, но не более, чем по 100 тугриков каждому. После реформы каждый житель сообщил, что потерял в результате реформы более 100 тугриков. Докажите, что лжецов на острове больше, чем рыцарей.

3. На доске написаны натуральные числа от 1 до 500. Вася и Петя по очереди (начинает Вася) стирают по одному числу, пока не останется два числа. Если сумма этих двух чисел делится на 3, выигрывает Вася, в противном случае — Петя. Кто выиграет при правильной игре?

4. Целые числа a, b, c таковы, что $a+b \geq 0$, $b+c \geq 0$, $c+a \geq 0$. Докажите, что $a+b+c \geq (|a|+|b|+|c|)/3$.

5. На шахматной доске расставлено несколько ладей. В какое наименьшее число цветов заведомо можно раскрасить этих ладей, чтобы никакие две одноцветные ладьи не били друг друга? Ладьи друг друга не бьют, если между ними находится еще одна ладья.

6. Рассмотрим треугольник ABC, где $AB = AC$. Пусть AD — высота, M — ее середина, N — основание перпендикуляра из D на BM. Докажите, что угол ANC — прямой.

7. Даны натуральные числа x_1, x_2, ..., x_5 и y_1, y_2, ..., y_5. Докажите, что число $(2x_1^2+3y_1^2)(2x_2^2+3y_2^2)...(2x_5^2+3y_5^2)$ не является квадратом натурального числа.

8. В компании из 2012^{2012} человек у каждого не более трех знакомых в этой компании. Всегда ли можно их построить в ряд так, чтобы между любыми двумя друзьями стояло не более чем 2012 человек?

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 19.02.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. На острове, где обитают только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, прошла финансовая реформа, в результате которой правительство отобрало часть денег у некоторых жителей и раздало все отобранные деньги остальным, но не более, чем по 100 тугриков каждому. После реформы каждый житель сообщил, что потерял в результате реформы более 100 тугриков. Докажите, что лжецов на острове больше, чем рыцарей.

2. В школе 2012 учеников, среди которых есть и мальчики, и девочки. Каждые двое из них сыграли между собой одну шахматную партию. Могло ли случиться, что партий, где мальчик играл с мальчиком, было столько же, сколько партий, где мальчик играл с девочкой?

3. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 500. Вася и Петя по очереди (начинает Вася) стирают по одному числу, пока не останется два числа. Если сумма этих двух чисел делится на 3, выигрывает Вася, в противном случае — Петя. Кто выиграет при правильной игре?

4. Пусть a, b, c — действительные числа. Докажите, что наименьшее из чисел $a+c-4b^2$, $a+b-4c^2$, $b+c-4a^2$ не превосходит 1/4.

5. На сторонах AC и AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A взяты точки E и F соответственно так, что $\angle AEF = \angle ABC$ и $\angle AFE = \angle ACB$. Точки E' и F' — основания перпендикуляров, опущенных на BC из точек E и F соответственно. Докажите, что $E'E+EF+FF' \le BC$.

6. Какие целые числа можно представить в виде $a^3+b^3+c^3-3abc$ с целыми a, b, c?

7. В лагере 2012^{2012} детей, у каждого не более трех друзей. Всегда ли можно их построить в ряд так, чтобы между любыми двумя друзьями стояло не более чем 2012 человек?

8. Прямоугольные треугольники OAP и OBP симметричны относительно общей гипотенузы OP. Точка M — середина AP, а точка N на отрезке BM такова, что $ON = OA$. Докажите, что $PN = 2MN$.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ»

Задача 1. *Петя очень любит числа, которые записываются с помощью нескольких (более одной) одинаковых цифр (например, 11, 333, 9999 и др.). Как Пете с помощью трех любимых чисел и двух знаков вычитания получить число 2012?*

Решение. 2222–111–99 = 2012.

Задача 2. *На острове, где обитают только рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут, прошла финансовая реформа, в результате которой правительство отобрало часть денег у некоторых жителей и раздало их остальным, но не более, чем по 100 тугриков каждому. После реформы каждый житель сообщил, что потерял в результате реформы более 100 тугриков. Докажите, что лжецов на острове больше, чем рыцарей.*

Решение. Допустим, лжецов не больше, чем рыцарей. Тогда по крайней мере у половины жителей острова отобрали больше, чем по 100 тугриков, и раздали эти деньги остальным (которых не больше, чем тех, у кого деньги отобрали!) так, что каждый получил не больше, чем по 100 тугриков. Но очевидно, что в таком случае общее количество розданных денег меньше общего количества отобранных. Противоречие.

Задача 3. *В течение суток десятеро ребят посетили библиотеку, а один из них посетил ее даже дважды. Оказалось, что любые двое ребят встретились в библиотеке. Можно ли с уверенностью утверждать, что в какой-то момент они все находились в библиотеке?*

Ответ: Нельзя. Решение. Пусть 9 ребят пришли в библиотеку в 13.00, Вася ушел из библиотеки в 13.05, остальные 8 — в 13.15. Петя пришел в библиотеку в 13.10 и ушел в 13.30. А Вася вернулся в библиотеку в 13.20 и ушел вместе с Петей. Очевидно, условие задачи выполнено, но ни в какой момент все 10 ребят не находились в библиотеке вместе.

Задача 4. *Дано четырехзначное число из различных ненулевых цифр. У него поменяли местами первую и последнюю цифры и прибавили получившееся число к исходному. Оказалось, что полученная сумма делится на 91. Докажите, что исходное число не делится на 91.*

Решение. Запишем данное число в виде $1000a+100b+10c+d$, где a, b, c, d — его цифры. Тогда полученная сумма будет равна $1000(a+d)+200b+20c+(d+a) = 1001(a+d)+2(100b+10c)$. Поскольку число 1001 делится на 91, на 91 делится и число $2(100b+10c)$, а вместе с ним — и число $100b+10c$ (так как двойки нет среди простых сомножителей числа 91). Осталось заметить, что $1000a+100b+10c+d = 1001a+(100b+10c)+(d–a)$, и в сумме в правой части первые два слагаемых делятся на 91, а последнее — нет.

Задача 5. *В некоторой стране 100 городов. Любые два города этой страны соединены дорогой. От этой страны отделилась независимая республика, причем количество дорог, соединяющих города этой республики, равно количеству дорог, ведущих из республики в остальные города этой страны. Сколько городов в отделившейся республике? (Приведите все варианты и докажите, что других нет).*

Ответ: 67. Решение. Пусть в отделившейся республике x городов. Тогда количество дорог, соединяющих ее города, равно $x(x–1)/2$ (из каждого из x городов выходит по $x–1$ дороге, и каждая дорога при этом считается дважды), а количество дорог, ведущих из республики в остальные города страны, равно $x(100–x)$. По условию $x(x–1)/2 = x(100–x)$. Сократив на x и решив получившееся уравнение, находим ответ.

Задача 6. *На шахматной доске расставлено несколько ладей. В какое наименьшее число цветов заведомо можно раскрасить этих ладей, чтобы никакие две одноцветные ладьи не били друг друга? (Ладьи не бьют друг сквозь друга).*

Ответ: В три цвета. Решение. Легко убедиться, что 5 ладей, расставленных в прямоугольнике 2×3 буквой «П», покрасить в два цвета с соблюдением условия задачи не удастся. А в три цвета ладей можно покрасить при любой расстановке, если красить их по строкам сверху вниз, а в каждой строке — слева направо: в этом случае каждую раскрашиваемую ладью будут бить не больше двух уже покрашенных.

Задача 7. *Четыре целых числа таковы, что сумма любых трех из них положительна. Докажите, что упятеренная сумма этих чисел больше суммы их модулей.*

Решение. Понятно, что среди данных чисел не больше двух неположительных. Если все данные числа положительны, сумма их модулей равна сумме самих чисел, и утверждение задачи очевидно. Пусть числа a, b, c положительны, а число d неположительно. Тогда нам надо сравнить $5a+5b+5c+5d$ и $|a|+|b|+|c|+|d| = a+b+c–d$, то есть $4a+4b+4c$ и $6|d|$. Поскольку суммы $a+b+d$, $a+c+d$ и $b+c+d$ положительны, каждая из сумм $a+b$, $a+c$ и $b+c$ больше $|d|$, откуда $4a+4b+4c = 2(a+b)+2(b+c)+2(a+c)$ больше $6|d|$, что и требовалось доказать.

Пусть, наконец, числа a и b положительны, а числа c и d неположительны. Тогда нам надо сравнить $5a+5b+5c+5d$ и $|a|+|b|+|c|+|d| = a+b–c–d$, то есть $4a+4b$ и $6|c|+6|d|$. Поскольку суммы $a+c+d = a–|c|–|d|$ и $b+c+d = b–|c|–|d|$ положительны, каждое из чисел a и b больше $|c|+|d|$. Поэтому $4a+4b$ больше, чем $8|c|+8|d|$ и, тем более, больше, чем $6|c|+6|d|$.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ МЛАДШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *В течение суток десятеро ребят посетили библиотеку, а один из них посетил ее даже дважды. Оказалось, что любые двое ребят встретились в библиотеке. Можно ли с уверенностью утверждать, что в какой-то момент они все находились в библиотеке?*

Ответ: Нельзя. Решение. Пусть 9 ребят пришли в библиотеку в 13.00, Вася ушел из библиотеки в 13.05, остальные 8 — в 13.15. Петя пришел в библиотеку в 13.10 и ушел в 13.30. А Вася вернулся в библиотеку в 13.20 и ушел вместе с Петей. Очевидно, условие задачи выполнено, но ни в какой момент все 10 ребят не находились в библиотеке вместе.

Задача 2. *На острове, где обитают только рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут, прошла финансовая реформа, в результате которой правительство отобрало часть денег у некоторых жителей и раздало их остальным, но не более, чем по 100 тугриков каждому. После реформы каждый житель сообщил, что потерял в результате реформы более 100 тугриков. Докажите, что лжецов на острове больше, чем рыцарей.*

Решение. Допустим, лжецов не больше, чем рыцарей. Тогда по крайней мере у половины жителей острова отобрали больше, чем по 100 тугриков, и раздали эти деньги остальным (которых не больше, чем тех, у кого деньги отобрали!) так, что каждый получил не больше, чем по 100 тугриков. Но очевидно, что в таком случае общее количество розданных денег меньше общего количества отобранных. Противоречие.

Задача 3. *На доске написаны натуральные числа от 1 до 500. Вася и Петя по очереди (начинает Вася) стирают по одному числу, пока не останется два числа. Если сумма этих двух чисел делится на 3, выигрывает Вася, в противном случае — Петя. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ: Петя. Решение. Для победы Пете надо стереть все числа, делящиеся на 3. Поскольку таких чисел 166, а ходов у Пети 249, это у него получится. Тогда перед последним ходом Пети на доске останется три числа, каждое из которых при делении на 3 дает остаток 1 или 2. Поэтому среди трех оставшихся чисел найдутся два с одинаковым остатком от деления на 3. Оставив их на доске, Петя выиграет.

Задача 4. Целые числа a, b, c таковы, что $a+b \geq 0$, $b+c \geq 0$, $c+a \geq 0$. Докажите, что $a+b+c \geq (|a|+|b|+|c|)/3$.

Решение. Если все данные числа неотрицательны, утверждение задачи очевидно. Если среди них есть отрицательное, то только одно, иначе одна из сумм $a+b$, $b+c$, $c+a$ была бы отрицательной. Пусть это c. Тогда $a+b+c \geq (|a|+|b|+|c|)/3 \Leftrightarrow 2a+2b \geq 4|c|$. Но последнее неравенство очевидно, ибо из неотрицательности сумм $b+c$ и $c+a$ вытекает, что $b \geq |c|$ и $a \geq |c|$.

Задача 5. *На шахматной доске расставлено несколько ладей. В какое наименьшее число цветов заведомо можно раскрасить этих ладей, чтобы никакие две одноцветные ладьи не били друг друга? (Ладьи не бьют друг сквозь друга).*

Ответ: В три цвета. Решение. Легко убедиться, что 5 ладей, расставленных в прямоугольнике 2×3 буквой «П», покрасить в два цвета с соблюдением условия задачи не удастся. А в три цвета ладей можно покрасить при любой расстановке, если красить их по строкам сверху вниз, а в каждой строке — слева направо: в этом случае каждую раскрашиваемую ладью будут бить не больше двух уже покрашенных.

Задача 6. *Рассмотрим треугольник ABC, где AB = AC. Пусть AD — высота, M — ее середина, N — основание перпендикуляра из D на BM. Докажите, что угол ANC — прямой.*

Решение. Пусть E — середина стороны AC. Как известно, медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, тогда и только тогда, когда угол, из которого она проведена — прямой. Поэтому достаточно доказать, что $NE = AC/2 = DE$. Пусть F — середина отрезка BD. Тогда отрезки ME и BF параллельны и равны, и потому $BMEF$ — параллелограмм. Следовательно, $EF \parallel MB$. Так как $BM \perp DN$, то и $EF \perp DN$. Кроме того, поскольку прямая EF делит пополам отрезок BD, она содержит среднюю линию треугольника BDN. Таким образом, EF — серединный перпендикуляр отрезка ND, откуда и следует равенство $NE = DE$.

Задача 7. *Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_5$ и $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Докажите, что число $(2x_1^2+3y_1^2)(2x_2^2+3y_2^2)\ldots(2x_5^2+3y_5^2)$ не является квадратом натурального числа.*

Решение. Пусть $x = 3^a m$, $y = 3^b n$, где a, b — целые неотрицательные числа, а m и n — натуральные числа, не делящиеся на 3. Назовем пару (x,y) *левой*, если $a > b$ и *правой* в противном случае. Для левой пары имеем $2x^2+3y^2 = 3^{2b+1}(2\cdot 3^{2(a-b)}m^2+n^2)$. Здесь число $2\cdot 3^{2(a-b)}m^2+n^2$ дает при делении на 3 остаток 1. Для правой пары имеем $2x^2+3y^2 = 3^{2a}(2m^2+3^{2(b-a)+1}n^2)$. Здесь число $2m^2+3^{2(b-a)+1}n^2$ дает при делении на 3 остаток 2.

Чтобы произведение $(2x_1^2+3y_1^2)(2x_2^2+3y_2^2)\ldots(2x_5^2+3y_5^2)$ было точным квадратом, необходимо, чтобы тройка входила в его разложение на простые сомножители в чётной степени, то есть число левых среди пар (x_1, y_1), …, (x_5, y_5) должно быть чётным. Но тогда число правых пар будет нечётным, и, следовательно, произведение всех простых сомножителей, не равных трём, будет при делении на 3 давать остаток 2, и, стало быть, не будет точным квадратом.

Задача 8. *В лагере 2012^{2012} детей, у каждого не более трех друзей. Всегда ли можно их построить в ряд так, чтобы между любыми двумя друзьями стояло не более чем 2012 человек?*

Ответ: Не всегда. Решение. Пусть Петя знаком с двоими, каждый из его знакомых — с двоими новыми, каждый из этих четверых — снова с двоими новыми и т.д., пока не перезнакомим всех 2012^{2012} детей. В получившемся «двоичном дереве» знакомств на k-ом от Пети ярусе (кроме, возможно, самого последнего) — 2^k детей, поэтому ярусов в нем не больше, чем m, где m таково, что $2^{m-1} < 2012^{2012} < 2^m$. Поскольку $2^{11} = 2048 > 2012$, $m < 11\cdot 2012$. Допустим, нам удалось построить детей нужным образом. Возьмем самого левого и самого правого. Между ними в построенном нами дереве есть путь длины не более $2m < 22\cdot 2012$. Но между любыми двумя соседями на этом пути в строю стоят не более 2012 человек. Поэтому длина строя должна быть не больше $2013\cdot 22\cdot 2012$, что, очевидно, намного меньше, чем 2012^{2012}. Противоречие.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ СТАРШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *На острове, где обитают только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, прошла финансовая реформа, в результате которой правительство отобрало часть денег у некоторых жителей и раздало их остальным, но не более, чем по 100 тугриков каждому. После реформы каждый житель сообщил, что потерял в результате реформы более 100 тугриков. Докажите, что лжецов на острове больше, чем рыцарей.*

Решение. Допустим, лжецов не больше, чем рыцарей. Тогда по крайней мере у половины жителей острова отобрали больше, чем по 100 тугриков, и раздали эти деньги остальным (которых не больше, чем тех, у кого деньги отобрали!) так, что каждый получил не больше, чем по 100 тугриков. Но очевидно, что в таком случае общее количество розданных денег меньше общего количества отобранных. Противоречие.

Задача 2. *В школе 2012 учеников, среди которых есть и мальчики, и девочки. Каждые двое из них сыграли между собой одну шахматную партию. Могло ли случиться, что партий, где мальчик играл с мальчиком, было столько же, сколько партий, где мальчик играл с девочкой*?

Ответ: Нет. Решение. Пусть в школе x мальчиков. Тогда количество партий, сыгранных между мальчиками, равно $x(x–1)/2$, а количество партий, где мальчик играл с девочкой, равно $x(2012–x)$. По условию $x(x–1)/2 = x(2012–x)$, откуда, $x–1 = 4024–2x \Leftrightarrow 3x = 4025$. Но 4025 не делится на 3.

Задача 3. *На доске написаны натуральные числа от 1 до 500. Вася и Петя по очереди (начинает Вася) стирают по одному числу, пока не останется два числа. Если сумма этих двух чисел делится на 3, выигрывает Вася, в противном случае — Петя. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ: Петя. Решение. Для победы Пете надо стереть все числа, делящиеся на 3. Поскольку таких чисел 166, а ходов у Пети 249, это у него получится. Тогда перед последним ходом Пети на доске останется три числа, каждое из которых при делении на 3 дает остаток 1 или 2. Поэтому среди трех оставшихся чисел найдутся два с одинаковым остатком от деления на 3. Оставив их на доске, Петя выиграет.

Задача 4. *a, b, c — действительные числа. Докажите, что наименьшее из чисел $a+c–4b^2$, $a+b–4c^2$, $b+c–4a^2$ не превосходит 1/4.*

Решение. Пусть $a \ge b \ge c$. Тогда $b+c–4a^2 \le 2a–4a^2 = 2a(1–2a) \le ((2a+(1–2a))/2)^2 = 1/4$.

Задача 5. *На сторонах AC и AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A взяты точки E и F соответственно так, что $\angle AEF = \angle ABC$ и $\angle AFE = \angle ACB$. Точки E' и F' — основания перпендикуляров, опущенных на BC из точек E и F соответственно. Докажите, что $E'E+EF+FF' \le BC$.*

Решение. Пусть точки F'' и E'' симметричны точкам F' и E' относительно прямых AB и AC соответственно. Заметим, что $\angle AEF = \angle ABC = \angle BFF' = \angle BFF''$. Поэтому точка F'' лежит на прямой EF. Аналогично, точка E'' лежит на EF. Далее, $E'E+EF+FF' = E''E+EF+FF'' = E''F''$, а углы $CE''F$ и $BF''F$ — прямые, поскольку

треугольники $CE''F$ и $BF''F$ симметричны треугольникам $CE'F$ и $BF'F$. Поэтому отрезок $E''F''=E'E+EF+FF'$ является прямоугольной проекцией отрезка CB, и, следовательно, не длиннее CB.

Задача 6. *Какие целые числа можно представить в виде $a^3+b^3+c^3-3abc$ с целыми a, b, c?*

Ответ: Все, кроме чисел, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Решение. Число $9n$ получается из тройки $n-1$, n, $n+1$, число $3n+1$ — из тройки n, n, $n+1$, число $3n-1$ — из тройки n, n, $n-1$. Заметим теперь, что, поскольку кубы целых чисел дают при делении на 3 те же остатки, что и сами эти числа, $a^3+b^3+c^3-3abc$ делится на 3 тогда и только тогда, когда $a+b+c$ делится на 3. А такое бывает только в двух случаях: когда все три остатка от деления a, b и c на 3 различны, и когда все они одинаковы. Легко проверить, что в обоих случаях $a^3+b^3+c^3-3abc$ делится на 9: достаточно представить каждое из чисел в виде $3\cdot\{$неполное частное$\}$+остаток, подставить в исходное выражение и раскрыть скобки.

Задача 7. *В лагере 2012^{2012} детей, у каждого не более трех друзей. Всегда ли можно их построить в ряд так, чтобы между любыми двумя друзьями стояло не более чем 2012 человек?*

Ответ: Не всегда. Решение. Пусть Петя знаком с двоими, каждый из его знакомых — с двоими новыми, каждый из этих четверых — снова с двоими новыми и т.д., пока не перезнакомим всех 2012^{2012} детей. В получившемся «двоичном дереве» знакомств на k-ом от Пети ярусе (кроме, возможно, самого последнего) — 2^k детей, поэтому ярусов в нем не больше, чем m, где m таково, что $2^{m-1} < 2012^{2012} < 2^m$. Поскольку $2^{11} = 2048 > 2012$, $m < 11\cdot 2012$. Допустим, нам удалось построить детей нужным образом. Возьмем самого левого и самого правого. Между ними в построенном нами дереве есть путь длины не более $2m < 22\cdot 2012$. Но между любыми двумя соседями на этом пути в строю стоят не более 2012 человек. Поэтому длина строя должна быть не больше $2013\cdot 22\cdot 2012$, что, очевидно, намного меньше, чем 2012^{2012}. Противоречие.

Задача 8. *Прямоугольные треугольники OAP и OBP симметричны относительно общей гипотенузы OP. Точка M — середина AP, а точка N на отрезке BM такова, что $ON = OA$. Докажите, что $PN = 2MN$.*

Решение. Рассмотрим окружность ω с центром в точке O и радиусом OA. Из условия следует, что она пройдет через точки A, B и N; при этом, т.к. $\angle PBO = \angle PAO = 90°$, PA и PB будут касательными к ω. Отметим на продолжении отрезка BM за точку M точки K и L так, что $NM = MK$, $BM = ML$. Заметим, что в четырехугольниках $ABPL$ и $ANPK$ диагонали в точке пересечения делятся пополам, следовательно, $ABPL$ и $ANPK$ – параллелограммы. Заметим, что $\angle ABN = \angle NAP$ (и оба равны половине дуги AN). Но тогда $\angle PLN = \angle ABL = \angle NAP$ и четырехугольник $PNAL$ – вписанный, откуда следует, что $\angle ALN = \angle APN$.

Покажем теперь, что $\angle NPK = \angle NKP$, откуда и будет следовать, что $PN = 2MN$. Действительно, $\angle NKP = \angle KNA$ и равен половине дуги ANB. $\angle KPN = \angle KPA+\angle APN$; $\angle APN = \angle ALN = \angle LBP$ и равен половине дуги NB, $\angle KPA = \angle PAN$ и равен половине дуги AN. Т.о. каждый из углов $\angle NPK$ и $\angle NKP$ равен половине дуги ANB, что и требовалось доказать.

ЯТУБОВ.РФ