МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение суммы $S = a/b+c/d$, где a, b, c, d — натуральные числа, удовлетворяющие условиям $a+c = 20202$, $b+d = 20200$.

2. В каждом из 100 сосудов лежит по 99 камней. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе должен взять по одному камню из 98 сосудов. Игрок, после хода которого два сосуда оказались пусты, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?

3. M и N — середины сторон CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно. Перпендикуляр к AB, проведенный через M, и перпендикуляр к BC, проведенный через N, пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на диагонали BD тогда и только тогда, когда диагонали AC и BD перпендикулярны.

4. По кругу записаны в порядке возрастания по часовой стрелке числа от 1 до 31. Разрешается взять любые три числа a, b, c (не обязательно соседние и стоящие в любом порядке) и заменить их числами c, a–1/10, и b+1/10 соответственно. Докажите, что, применяя такие операции, можно добиться, чтобы числа стояли в порядке возрастания против часовой стрелки.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектриса угла CAD проходит через середину отрезка BD. Известно, что $BD = 2AB$. Докажите, что $AD = 3BC$.

6. Найдите все такие натуральные m, n и простые p, что число $\dfrac{7^m + 2^n p}{7^m - 2^n p}$ — натуральное.

7. Из чисел 1, 2, ..., 37 произвольным образом выбраны 11 различных. Докажите, что из этих 11 чисел можно выбрать четыре таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

8. Таблица 50×50 заполнена натуральными числами таким образом, что все суммы чисел по строкам и столбцам равны. Какое наименьшее количество чисел надо изменить, чтобы все эти 100 сумм стали попарно различны?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение суммы $S = a/b+c/d$, где a, b, c, d — натуральные числа, удовлетворяющие условиям $a+c = 20202$, $b+d = 20200$.

2. В каждом из 100 сосудов лежит по 100 камней. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе должен взять по одному камню из 98 сосудов. Игрок, после хода которого два сосуда оказались пусты, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?

3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $AI = BC$ и $\angle ICA = 2\angle IAC$. Найдите угол ABC.

4. Известно, что $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{11}$. Найдите $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектриса угла CAD проходит через середину отрезка BD. Известно, что $BD = 2AB$. Докажите, что $AD = 3BC$.

6. Найдите все такие натуральные m, n и простые p, что число $\dfrac{7^m + 2^n p}{7^m - 2^n p}$ — натуральное.

7. Из чисел 1, 2, ..., 37 произвольным образом выбраны 13 различных. Докажите, что из этих 13 чисел можно выбрать четыре таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

8. Таблица 50×50 заполнена натуральными числами таким образом, что все суммы чисел по строкам и столбцам равны. Какое наименьшее количество чисел надо изменить, чтобы все эти 100 сумм стали попарно различны?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА: ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение суммы $S = a/b+c/d$, где a, b, c, d — натуральные числа, удовлетворяющие условиям $a+c = 20202$, $b+d = 20200$.

2. В каждом из 100 сосудов лежит по 100 камней. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе должен взять по одному камню из 98 сосудов. Игрок, после хода которого два сосуда оказались пусты, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?

3. На стороне AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B взята точка D такая, что $CD = AB$, а на стороне BC — точка E такая, что $DB = DE$. Известно, что $\angle CAB = 2\angle ABD$. Найдите угол EDC.

4. Известно, что $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{11}$. Найдите $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точка K — середина диагонали BD. Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD и $AD = 3BC$. Докажите, что $AC = 2BC$.

6. Найдите все такие натуральные m и простые p, что число $\dfrac{7^m + 2p}{7^m - 2p}$ — натуральное.

7. Из чисел 1, 2, ..., 37 произвольным образом выбраны 13 различных. Докажите, что из этих 13 чисел можно выбрать четыре таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

8. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 2×2011 в два цвета так, чтобы никакие три клетки одного цвета не образовывали уголок из трех клеток?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Найдите наибольшее число, делящееся на 72, которое можно получить из числа 123...20092010 (все натуральные числа от 1 до 2010 записаны подряд) вычеркиванием некоторых цифр.

2. Таблица 50×50 заполнена натуральными числами таким образом, что все суммы чисел по строкам и столбцам равны. Какое наименьшее количество чисел надо изменить, чтобы все эти 100 сумм стали попарно различны?

3. Для любых целых чисел a, b, c и d докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+3d^2 \geq (2d-1)(a+b+c)+3d$.

4. Из чисел 1, 2, ..., 37 произвольным образом выбраны 11 различных. Докажите, что из этих 11 чисел можно выбрать четыре таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точка K — середина диагонали BD. Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD и $AD = 3BC$. Докажите, что $AC = 2BC$.

6. В каждом из 100 сосудов лежит по 97 камней. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе должен взять по одному камню из 98 сосудов. Игрок, после хода которого два сосуда оказались пусты, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?

7. Аня, Боря, Вика и Галя навещали Диму. Договорились они прийти в один день, но в разное время и пробыли у Димы по 15 минут. Аня посетила Диму в 8 часов, Боря пришел в 9 часов, Вика — в 10 часов, а Галя пришла в 11 часов, только неизвестно кто из них приходил утром, а кто вечером. Известно, что: 1) К Диме кто-то приходил между Аней и Борей; 2) Какая-то из девочек пришла к Диме до Ани; 3) Вика не заходила к Диме между Борей и Галей. Определите кто в какое время приходил к Диме.

8. Найдите все простые числа p такие, что число $(p^2-23)(9p+5)$ — точный квадрат.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. Найдите наибольшее число, делящееся на 72, которое можно получить из числа 123...20092010 (все натуральные числа от 1 до 2010 записаны подряд) вычеркиванием некоторых цифр.

2. Таблица 48×48 заполнена натуральными числами таким образом, что все суммы чисел по строкам и столбцам равны. Какое наименьшее количество чисел надо изменить, чтобы все эти 96 сумм стали попарно различны?

3. Для любых целых чисел a, b и c докажите неравенство $a^2+b^2+2c^2 \geq (2c-1)(a+b)+2c$.

4. Из чисел 1, 2, ..., 37 произвольным образом выбраны 13 различных. Докажите, что из этих 13 чисел можно выбрать четыре таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точка K — середина диагонали BD. Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD и $AD = 3BC$. Докажите, что $AC = 2BC$.

6. Дан прямоугольник 2×2012 (2 строки, 2012 столбцов). Два игрока ходят по очереди. Первый своим ходом вычеркивает две соседние по вертикали клетки, а второй вычеркивает две соседние по горизонтали клетки. Вычеркивать ранее вычеркнутые клетки нельзя. Игрок, не имеющий хода, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Аня, Боря, Вика и Галя навещали Диму. Договорились они прийти в один день, но в разное время и пробыли у Димы по 15 минут. Аня посетила Диму в 8 часов, Боря пришел в 9 часов, Вика — в 10 часов, а Галя пришла в 11 часов, только неизвестно кто из них приходил утром, а кто вечером. Известно, что: 1) К Диме кто-то приходил между Аней и Борей; 2) Какая-то из девочек пришла к Диме до Ани; 3) Вика не заходила к Диме между Борей и Галей. Определите кто в какое время приходил к Диме.

8. Найдите все простые числа p такие, что число $(p^2-23)(9p+5)$ — точный квадрат.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА: ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите наибольшее число, делящееся на 72, которое можно получить из числа 123...20092010 (все натуральные числа от 1 до 2010 записаны подряд) вычеркиванием некоторых цифр.

2. 100 депутатов Думы пользуются сетью Билайн, а 200 депутатов – сетью Мегафон. За внутрисетевой звонок Билайн берёт 43 копейки, а Мегафон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый депутат звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Мегафона, если его ежедневные доходы с депутатов более чем на 11000 рублей превышают доходы Билайна?

3. Числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a+d = b+c$. Докажите неравенство $(a–b)(c–d)+(a–c)(b–d)+(d–a)(b–c) \geq 0$.

4. Из чисел 1, 2, ..., 37 произвольным образом выбраны 13 различных. Докажите, что из этих 13 чисел можно выбрать четыре таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

5. На диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка E. Известно, что $AB = CE$, $\angle ABD = \angle BCE = \angle ECD$ и $\angle DAB = \angle ABC$. Докажите, что треугольник BCD равнобедренный.

6. Дан прямоугольник 2×2012 (2 строки, 2012 столбцов). Два игрока ходят по очереди. Первый своим ходом вычеркивает две соседние по вертикали клетки, а второй вычеркивает две соседние по горизонтали клетки. Вычеркивать ранее вычеркнутые клетки нельзя. Игрок, не имеющий хода, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Аня, Боря, Вика и Галя навещали Диму. Договорились они прийти в один день, но в разное время и пробыли у Димы по 15 минут. Аня посетила Диму в 8 часов, Боря пришел в 9 часов, Вика — в 10 часов, а Галя пришла в 11 часов, только неизвестно кто из них приходил утром, а кто вечером. Известно, что: 1) К Диме кто-то приходил между Аней и Борей; 2) Какая-то из девочек пришла к Диме до Ани; 3) Вика не заходила к Диме между Борей и Галей. Определите кто в какое время приходил к Диме.

8. Трехзначные числа $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ делятся на простое число p. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+b+c$, $a–b+c$ или $a–c$ также делится на p.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2011

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число $n > 100$. Докажите, что найдется число, которое меньше n, больше единицы, и не имеет с числом $n(n-1)$ общих делителей, кроме 1.

2. В некоторые клетки таблицы 13×13 записали числа. Оказалось, что все суммы чисел по строкам и столбцам попарно различны. Какое наибольшее количество клеток могли остаться свободными?

3. Из чисел 1, 2, ..., 100 произвольным образом выбраны 20 различных. Докажите, что из этих 20 чисел можно выбрать четыре таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

4. На каждой клетке доски 8×8 лежит камень. Камни убывают по весу в каждой строке (слева направо) и каждом столбце (снизу вверх). Разрешается взвесить на весах (показывающих вес груза) любой камень (несколько камней сразу взвешивать нельзя). Покажите, как за 15 таких взвешиваний определить, есть ли на доске камень, весящий 100 грамм.

5. На доске написано число 2011. Вася может написанное число умножать на 8 или делить на 8 (если частное — целое число), либо переставлять в нем цифры (0 на первое место ставить нельзя). Может ли Вася такими операциями получить число 1?

6. На доску выписано несколько натуральных чисел, не превосходящих 100. Оказалось, что числа 1 и 2 выписаны и ни одно из выписанных чисел не равно сумме двух различных выписанных чисел. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

7. Как провести на круглом листе бумаги пять отрезков, каждый из которых соединяет две точки на краю листа, чтобы среди частей, на которые эти отрезки делят лист, оказались хотя бы один пятиугольник и хотя бы два четырехугольника?

8. В стране несколько городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем из любого города в любой другой можно добраться по этим дорогам. Оказалось, что из двух городов выходят по две дороги, а из остальных — по три или по одной. Докажите, что можно закрыть несколько дорог на ремонт таким образом, чтобы из каждого города выходило по три или по одной дороге.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2011

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовём натуральное число n, большее 3, *сложным*, если с каждым натуральным числом, меньшими n, кроме 1 и $n-1$, у него есть общий простой делитель. Найдите все сложные числа, меньшие 1000.

2. В некоторые клетки таблицы 5×5 записали числа. Оказалось, что все суммы чисел по строкам и столбцам попарно различны. Какое наибольшее количество клеток могли остаться свободными?

3. Определите максимально возможное число, делящееся на 6, которое может быть получено из числа 123…200920102011 вычеркиванием некоторых из его цифр. .

4. На 49 карточках записаны числа от 1 до 49. Карточки выложены в квадрат 7×7 числами вниз. Известно, что в каждом горизонтальном ряду числа упорядочены по возрастанию слева направо, а в вертикальном – сверху вниз. Можно ли последовательно открыть не более 12 карточек, чтобы найти карточку с числом 25?

5. В кружке 6 человек и у каждого ровно 3 друга в этом кружке. Верно ли что всех кружковцев можно рассадить за 3 парты, за каждой из которых сидят 2 друга?

6. Петя и Вася по очереди умножают записанное на доске число на одно из трёх чисел: 2, 3 или 4. Сначала на доске написана единица. Выигрывает тот, кто первым получит результат больше 250000. Кто может выиграть независимо от игры соперника?

7. Как провести на круглом листе бумаги пять отрезков, каждый из которых соединяет две точки на краю листа, чтобы среди частей, на которые эти отрезки делят лист, оказались хотя бы один пятиугольник и хотя бы один четырехугольник?

8. 100 депутатов Думы пользуются сетью Билайн, а 200 депутатов – сетью Мегафон. За внутрисетевой звонок Билайн берёт 43 копейки, а Мегафон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый депутат звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Мегафона, если его ежедневные доходы с депутатов более чем на 11000 рублей превышают доходы Билайна?