XXXVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14-20.02.2011

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть n — натуральное число. Для каждого его простого делителя p рассмотрим наибольшую его степень, не превосходящую n. Сумму всех таких степеней назовём *степенной суммой* числа n. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, степенные суммы которых превосходят их более, чем в полтора раза.

2. На стороне BC треугольника ABC лежат точки D и E, причем $BD < BE$. Докажите, что разность периметров треугольников ABC и ADE больше, чем удвоенная длина меньшего из отрезков BD и EC.

3. Существуют ли на плоскости четыре бесконечных семейства параллельных прямых такие, что расстояние между любыми двумя соседними прямыми одного семейства больше 1 и меньше 2, а через каждую точку пересечения двух прямых из разных семейств проходят прямые двух других семейств?

4. В каждом из 30 сундуков лежит по 13 монет. Монеты весят натуральное число граммов, не большее 30, причем монет каждого веса ровно 13. Известно, что веса любых двух монет, лежащих в одном сундуке, отличаются не более, чем на 4 грамма. Назовем сундук *максимальным*, если суммарный вес монет в нем не меньше, чем в других сундуках. Какой наименьший суммарный вес может быть у монет в максимальном сундуке?

5. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, ... первый член равен 1, а каждый следующий получается из предыдущего умножением на одно из чисел 2, 3, …, 9, причем умножение на каждое число из них производилось хотя бы один раз. Докажите, что для бесконечно многих n сумма цифр числа a_{n+1} не превосходит суммы цифр числа a_n.

6. В тупоугольном треугольнике ABC с тупым углом C угол B в два раза больше угла A. На стороне AB отмечена точка P такая, что $BP = 2BC$. Известно, что середина M стороны AB лежит между P и B. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из M на сторону AC, делит отрезок PC пополам.

7. В каждой клетке таблицы $k\times n$ (k строк, n столбцов) стоит 1 или 0. Известно, что в каждой строчке есть хотя бы две единицы и хотя бы один ноль. При каком наибольшем k заведомо можно так переставить столбцы, чтобы в результате ни в одной строчке все единицы не стояли подряд?

8. В кружок записались 2011 мальчиков и 2011 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с 10 девочками. Докажите, что можно выбрать 100 мальчиков и 10 девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пусть n — натуральное число. Для каждого его простого делителя p рассмотрим наибольшую его степень, не превосходящую n. Сумму всех таких степеней назовём *степенной суммой* числа n. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, меньших, чем их степенные суммы.

2. На стороне BC треугольника ABC лежат точки D и E, причем $BD < BE$. Докажите, что разность периметров треугольников ABC и ADE больше, чем удвоенная длина меньшего из отрезков BD и EC.

3. Существуют ли на плоскости четыре конечных семейства параллельных прямых (в каждом — хотя бы две прямые) такие, что расстояние между любыми двумя соседними прямыми одного семейства больше 1 и меньше 2, а через каждую точку пересечения двух прямых из разных семейств проходят прямые из двух других семейств?

4. В каждом из 30 сундуков лежит по 13 монет. Монеты весят натуральное число граммов, не большее 30, причем монет каждого веса ровно 13. Известно, что веса любых двух монет, лежащих в одном сундуке, отличаются не более, чем на 2 грамма. Назовем сундук *максимальным*, если суммарный вес монет в нем не меньше, чем в других сундуках. Какой наименьший суммарный вес может быть у монет в максимальном сундуке?

5. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, ... первый член равен 1, а каждый следующий получается из предыдущего умножением на одно из чисел 2, 3, …, 9, причем умножение на каждое число из них производилось хотя бы один раз. Докажите, что для бесконечно многих n сумма цифр числа a_{n+1} не превосходит суммы цифр числа a_n.

6. Даны натуральное n и простое p. Докажите, что если $n!$ делится на p^p, то оно делится и на p^{p+1}.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) $\angle A = 30°$. На медиане AD взята точка P, а на стороне AB — точка Q таким образом, что $PB = PQ$. Найдите угол PQC.

8. В кружок записались 2011 мальчиков и 2011 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с 10 девочками. Докажите, что можно выбрать 100 мальчиков и 10 девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Пусть n — натуральное число. Для каждого его простого делителя p рассмотрим наибольшую его степень, не превосходящую n. Сумму всех таких степеней назовём *степенной суммой* числа n. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, меньших, чем их степенные суммы.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD $\angle ABC = 65°$ и $\angle ADC = 130°$. Биссектриса угла ADC пересекает отрезок AB в точке E. Известно, что $AD = 12$ и $BE = 15$. Найдите среднюю линию трапеции.

3. Существуют ли на плоскости четыре конечных семейства параллельных прямых (в каждом — хотя бы две прямые) таких, что расстояние между любыми двумя соседними прямыми одного семейства больше 1 и меньше 2, а через каждую точку пересечения двух прямых из разных семейств проходят прямые из двух других семейств?

4. Даны натуральное n и простое p. Докажите, что если $n!$ делится на p^p, то оно делится и на p^{p+1}.

5. В каждом из 30 сундуков лежит по 13 монет. Монеты весят натуральное число граммов, не большее 30, причем монет каждого веса ровно 13. Известно, что веса любых двух монет, лежащих в одном сундуке, отличаются не более, чем на 2 грамма. Назовем сундук *максимальным*, если суммарный вес монет в нем не меньше, чем в других сундуках. Какой наименьший суммарный вес может быть у монет в максимальном сундуке?

6. В строчку выписывают натуральные числа. Каждое число, начиная с третьего – наибольший нечетный делитель суммы двух предыдущих чисел, уменьшенный на 1. Докажите, что рано или поздно в строчке появится 0.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) $\angle A = 30°$. На медиане AD взята точка P, а на стороне AB — точка Q таким образом, что $PB = PQ$. Найдите угол PQC.

8. В кружок записались 2011 мальчиков и 2011 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с 10 девочками. Докажите, что можно выбрать 19 мальчиков и 2 девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На каждой клетке доски 8×9 (8 строк, 9 столбцов) стоит по фишке. В некоторый момент каждая фишка сдвинулась на соседнее поле по горизонтали или диагонали. Докажите, что в результате этого образовалось хотя бы 8 пустых клеток.

2. Петя и Вася играют в такую игру. На крайнем левом поле клетчатой ленты длины 20 лежит кучка из 2011 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из ребят своим ходом может сдвинуть любой камень на одно или два поля вправо. Выигрывает тот, кто первым поставит камень на крайнюю правую клетку. Кто выиграет при правильной игре?

3. На доске написаны числа 1, 2, ..., 33. За один шаг можно стереть любые два числа, произведение которых — квадрат натурального числа, и вместо них записать квадратный корень из их произведения (в частности можно заменить два равных числа на одно). После нескольких шагов на доске остались числа, произведение любых двух из которых — не точный квадрат. Докажите, что на доске осталось не менее 16 чисел.

4. Найдите все натуральные n, для которых число 5^n+12^n является точным квадратом.

5. В каждом из 30 сундуков лежит по 13 монет. Монеты весят натуральное число граммов, не большее 30, причем монет каждого веса ровно 13. Известно, что веса любых двух монет, лежащих в одном сундуке, отличаются не более, чем на 2 грамма. Назовем сундук *наибольшим*, если суммарный вес монет в нем не меньше, чем в других сундуках. Какой наименьший суммарный вес может быть у монет в наибольшем сундуке?

6. Для чисел a и b, не меньших 1, докажите неравенство

$$(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geq 4.$$

7. O — точка пересечения диагоналей CE и AD выпуклого пятиугольника $ABCDE$. Известно, что $AB = DE$, $BC = AD = CE/2$ и $\angle ADE = \angle BAC+\angle BCA$. Докажите, что $AO = OE$.

8. В кружок записались 2011 мальчиков и 2011 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с 10 девочками. Докажите, что можно выбрать 100 мальчиков и 10 девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На каждой клетке доски 8×9 (8 строк, 9 столбцов) стоит по фишке. В некоторый момент каждая фишка сдвинулась на соседнее поле по горизонтали или диагонали. Докажите, что в результате этого образовалось хотя бы 8 пустых клеток.

2. Петя и Вася играют в такую игру. На крайнем левом поле клетчатой ленты длины 20 лежит кучка из 2010 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из ребят своим ходом может сдвинуть любой камень на одно или два поля вправо. Выигрывает тот, кто первым поставит камень на крайнюю правую клетку. Кто выиграет при правильной игре?

3. На доске написаны числа 1, 2, ..., 33. За один шаг можно стереть любые два числа, произведение которых — квадрат натурального числа, и вместо них записать квадратный корень из их произведения (в частности можно заменить два равных числа на одно). После нескольких шагов на доске остались числа, произведение любых двух из которых — не точный квадрат. Докажите, что на доске осталось не менее 15 чисел.

4. Найдите все натуральные n, для которых число 5^n+12^n является точным квадратом.

5. При каких натуральных $n > 1$ натуральные числа от 1 до n можно так покрасить в красный, синий, желтый и зеленый цвета, что чисел каждого цвета будет поровну и суммы синих, красных, желтых и зеленых чисел одинаковы.

6. Для чисел a и b, не меньших 1, докажите неравенство

$$(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geq 4.$$

7. O — точка пересечения диагоналей CE и AD выпуклого пятиугольника $ABCDE$. Известно, что $AB = DE$, $BC = AD = CE/2$ и $\angle ADE = \angle BAC+\angle BCA$. Докажите, что $AO = OE$.

8. В кружок записались 15 мальчиков и 15 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с тремя девочками. Докажите, что можно выбрать шестерых мальчиков и двух девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На каждой клетке доски 8×9 (8 строк, 9 столбцов) стоит по фишке. В некоторый момент каждая фишка сдвинулась на соседнее поле по горизонтали или диагонали. Докажите, что в результате этого образовалось хотя бы одна пустая клетка.

2. Петя и Вася играют в такую игру. На крайнем левом поле клетчатой ленты длины 19 лежит кучка из 2011 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из ребят своим ходом может сдвинуть любой камень на одно или два поля вправо. Выигрывает тот, кто первым поставит камень на крайнюю правую клетку. Кто выиграет при правильной игре?

3. На доске написаны числа 1, 2, ..., 33. За один шаг можно стереть любые два числа, произведение которых — квадрат натурального числа, и вместо них записать квадратный корень из их произведения (в частности можно заменить два равных числа на одно). После нескольких шагов на доске остались числа, произведение любых двух из которых — не точный квадрат. Докажите, что на доске осталось не менее 9 чисел.

4. Вася перемножил все натуральные числа от 1000 до 2000 включительно и прибавил к этому произведению единицу. Докажите, что все простые делители полученного числа больше 2000.

5. При каких натуральных $n > 1$ натуральные числа от 1 до n можно так покрасить в красный, синий, желтый и зеленый цвета, что чисел каждого цвета будет поровну и суммы синих, красных, желтых и зеленых чисел одинаковы.

6. Для чисел a и b, не меньших 1, докажите неравенство

$$(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geq 4.$$

7. Существуют ли два таких картонных треугольника, из которых, разными способами прикладывая их друг к другу без наложений, можно получить треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник?

8. В кружок записались 15 мальчиков и 15 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с тремя девочками. Докажите, что можно выбрать пятерых мальчиков и двух девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

XXXVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14-20.02.2011

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2011

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Петя и Вася играют в такую игру. На крайнем левом поле клетчатой ленты длины 20 лежит кучка из 2011 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из ребят своим ходом может сдвинуть любой камень на одно или два поля вправо. Выигрывает тот, кто первым поставит камень на крайнюю правую клетку. Кто выиграет при правильной игре?

2. В кружок записались 15 мальчиков и 15 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с тремя девочками. Докажите, что можно выбрать пятерых мальчиков и двух девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

3. На доске написано несколько (больше одного) различных натуральных чисел. Известно, что из любых трех написанных чисел можно выбрать два таких, что одно из них делится на другое. Докажите, что можно выбрать такие два написанных числа a и b, что любое из написанных чисел делится хотя бы на одно из этих двух.

4. На каждой клетке доски 8×9 (8 строк, 9 столбцов) стоит по фишке. В некоторый момент каждая фишка сдвинулась на соседнее поле по горизонтали или диагонали. Докажите, что в результате этого образовалось хотя бы 8 пустых клеток.

5. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 100. За одну операцию любые два написанных числа заменяют на сумму цифр их суммы. В результате 99 таких операций на доске осталось одно число. Может ли оно равняться 5?

6. Вася перемножил все натуральные числа от 100 до 200 включительно и прибавил к этому произведению единицу. Докажите, что все делители полученного числа, кроме единицы, больше 200.

7. Среди семи монет есть одна фальшивая, которая на 1 грамм легче настоящих, и одна фальшивая, которая на 1 грамм тяжелее настоящих. Как за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь найти и лёгкую, и тяжёлую монеты?

8. Существуют ли два таких картонных треугольника, из которых, разными способами прикладывая их друг к другу без наложений, можно получить треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2011

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На первой горизонтали клетчатой доски 9×9 стоят пешки. Пешкой разрешается ходить только вперёд на одно или два поля. Выходить за пределы доски нельзя. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре?

2. В кружок записались 15 мальчиков и 15 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с тремя девочками. Докажите, что можно выбрать 5 мальчиков и двух девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

3. Даны 2011 различных натуральных чисел. Известно, что для любых двух из этих чисел одно делится на другое. Докажите, что у какого-то из этих 2011 чисел среди остальных данных чисел столько же делителей, сколько чисел делятся на него.

4. На каждой клетке доски 8×9 (8 строк, 9 столбцов) стоит по фишке. В некоторый момент каждая фишка сдвинулась на соседнее поле по горизонтали или диагонали. Докажите, что в результате этого образовалось хотя бы 8 пустых клеток.

5. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 99. За одну операцию любые два написанных числа заменяют на сумму цифр их суммы. В результате 98 таких операций на доске осталось одно число. Может ли оно равняться 5?

6. Вася перемножил все натуральные числа от 100 до 200 включительно и прибавил к этому произведению единицу. Докажите, что все простые делители полученного числа, кроме единицы, больше 200.

7. Среди шести монет есть одна фальшивая, которая на 1 грамм легче настоящих, и одна фальшивая, которая на 1 грамм тяжелее настоящих. Как за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь найти и лёгкую и тяжёлую монеты?

8. Существуют ли два таких картонных треугольника, из которых, разными способами прикладывая их друг к другу без наложений, можно получить треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник?