

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В компании 2011 человек. Оказалось, что любые двое имеют хотя бы двух общих знакомых. Назовем *трио* любую тройку попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать 3333 различных трио.
2. Докажите, что если числа ab , cd и $ac+bd$ делятся на k , то ac и bd тоже делятся на k (a, b, c, d, k — натуральные числа)
3. Можно ли вырезать из доски 8×8 восемь клеток так, чтобы из оставшихся клеток нельзя было вырезать по клеткам прямоугольник площади, не меньшей 8?
4. Решите уравнение $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$ в различных натуральных числах.
5. Точки K и L расположены на сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно так, что $AK/KD = CL/LB$. Прямая KL пересекает отрезки AC и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $KP/QL = S_{ACD}/S_{BCD}$.
6. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca + \frac{3(a-b)^2}{4}$ при любых a, b и c .
7. Внутри треугольника ABC ($AB < BC$) лежит точка O , равноудаленная от трех его вершин. BD — биссектриса угла B . Точка M — середина стороны AC , а точка P на луче MO такова, что $\angle APC = \angle ABC$. Точка N — основание перпендикуляра, опущенного из P на BC . Докажите, что каждая из диагоналей четырехугольника $BDMN$ делит треугольник ABC на две равновеликие части.
8. Дано натуральное число N . Два игрока по очереди делают такие ходы: А пишет на доске число 1 или -1 , В прибавляет к этому числу 2 или вычитает из него 2, потом А прибавляет или вычитает 3 и т.д. (на k -м ходу игрок прибавляет k или вычитает k). Игрок, после хода которого число впервые будет делиться на N , выигрывает. Для каждого N , большего 10, определите, есть ли у одного из игроков выигрышная стратегия, и если есть, то у какого.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В компании 2011 человек. Оказалось, что любые двое имеют хотя бы двух общих знакомых. Назовем *трио* любую тройку попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать 3333 различных трио.
2. Докажите, что если числа ab , cd и $ac+bd$ делятся на k , то ac и bd тоже делятся на k (a, b, c, d, k — натуральные числа).
3. Можно ли вырезать из доски 8×8 восемь клеток так, чтобы из оставшихся клеток нельзя было вырезать по клеткам прямоугольник площади, не меньшей 8?
4. Решите уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = (x + y + z + t)^2$ в различных натуральных числах.
5. Через вершину C равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) с острым углом при вершине A провели перпендикуляр к BC и на этом перпендикуляре отметили точку P , лежащую с той же стороны от прямой BC , что и A , и с той же стороны от прямой AB , что и C . Точка D такова, что $ABPD$ — параллелограмм. M — точка пересечения прямой PC и отрезка AD . Найдите отношение DM/DA .
6. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{3(a-b)^2}{4}$ при любых a, b и c .
7. Внутри треугольника ABC ($AB < BC$) лежит точка O , равноудаленная от трех его вершин. BD — биссектриса угла B . Точка M — середина стороны AC , а точка P на луче MO такова, что $\angle APC = \angle ABC$. Точка N — основание перпендикуляра, опущенного из P на BC . Докажите, что каждая из диагоналей четырехугольника $BDMN$ делит треугольник ABC на две равновеликие части.
8. В коробке лежат 50 синих и 50 красных шариков. Вася хочет набрать 25 синих шариков из коробки. Для этого он вслепую вытаскивает по два шарика. Если он вытащил два синих, то берет оба. Если синий и красный, то берет синий, а красный кладет обратно в коробку. Наконец, если он вытащил два красных, то оба откладывает в сторону. За какое наименьшее число вытаскиваний Вася заведомо сможет набрать 25 синих шариков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2011

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дорогу разделили на 2011 частей (не обязательно равной длины). Яна знает длину дороги. Ей разрешено спросить, чему равно расстояние между серединами любых двух частей, при этом количество вопросов неограничено. Длину каких частей она сможет узнать?
2. Докажите, что если числа ab , cd и $ac+bd$ делятся на k , то ac и bd тоже делятся на k .
3. Можно ли вырезать из доски 8×8 восемь клеток так, чтобы из оставшихся клеток нельзя было вырезать по клеткам прямоугольник площади, не меньшей 8?
4. Решите уравнение $x^3+y^3 = (x+y)^2$ в различных натуральных числах.
5. Через вершину C равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) с острым углом при вершине A провели перпендикуляр к BC и на этом перпендикуляре отметили точку P , лежащую с той же стороны от прямой BC , что и A , и с той же стороны от прямой AB , что и C . Точка D такова, что $ABPD$ — параллелограмм. M — точка пересечения прямой PC и отрезка AD . Найдите отношение DM/DA .
6. В двух коробках лежат конфеты. Если к коробке подходит Вася, то он берет $1/17$ часть конфет, имеющихся в данный момент в этой коробке, если Петя — то $1/12$, а Коля всегда берет $1/4$ часть. Если у берущего конфеты не получается взять ровно столько, сколько надо, то он воздерживается от сладкого. Вначале в коробках конфет было поровну, по истечении некоторого срока оказалось, что конфет снова поровну. Можно ли утверждать, что каждый из мальчиков лакомился из первой коробки столько же раз, сколько из второй?
7. Внутри угла отмечена точка P , не лежащая на его биссектрисе. Отрезки AB и CD проходят через точку P , при этом A и C лежат на одной стороне угла, B и D на другой, отрезок CD перпендикулярен биссектрисе угла, а отрезок AB делится точкой P пополам. Докажите, что $AB > CD$.
8. В коробке лежат 50 синих и 50 красных шариков. Вася хочет набрать 25 синих шариков из коробки. Для этого он вслепую вытаскивает по два шарика. Если он вытащил два синих, то берет оба. Если синий и красный, то берет синий, а красный кладет обратно в коробку. Наконец, если он вытащил два красных, то оба откладывает в сторону. За какое наименьшее число вытаскиваний Вася заведомо сможет набрать 25 синих шариков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В компании 2011 человек. Оказалось, что любые двое имеют хотя бы двух общих знакомых. Назовем *трио* любую тройку попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать 3333 различных трио.
2. Можно ли квадрат разрезать на 17 прямоугольников, у каждого из которых меньшая сторона относится к большей, как 3:5?
3. В коробке лежат 50 синих и 50 красных шариков. Вася хочет набрать 25 синих шариков из коробки. Для этого он вслепую вытаскивает по два шарика. Если он вытащил два синих, то берет оба. Если синий и красный, то берет синий, а красный кладет обратно в коробку. Наконец, если он вытащил два красных, то оба откладывает в сторону. За какое наименьшее число вытаскиваний Вася заведомо сможет набрать 25 синих шариков?
4. Найдите все натуральные a , b , c и d , для которых справедливо равенство: $a+b+c+d-3 = ab = cd$.
5. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Точка M — середина стороны BC . Докажите, что $AB+BC > 2AM$.
6. Найдите все натуральные n , для которых $\frac{4n-2}{n+5}$ равно отношению квадратов двух натуральных чисел.
7. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca+\frac{3(a-b)^2}{4}$ при любых a , b и c .
8. На острове живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. За круглым столом сидят представители этих племен. Каждый из сидящих за столом произнес две фразы: 1) «Слева от меня сидит лжец.» 2) «Справа от меня сидит хитрец.» Докажите, что за этим столом рыцарей сидит столько же, сколько и лжецов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В компании 2011 человек. Оказалось, что любые двое имеют хотя бы двух общих знакомых. Назовем *трио* любую тройку попарно знакомых человек. Докажите, что можно выбрать 2011 различных трио.
2. Можно ли квадрат разрезать на 17 прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон в 2,5 раза больше другой?
3. В коробке лежат 10 синих и 10 красных шариков. Вася хочет набрать 5 синих шариков из коробки. Для этого он вслепую вытаскивает по два шарика. Если он вытащил два синих, то берет оба. Если синий и красный, то берет синий, а красный кладет обратно в коробку. Наконец, если он вытащил два красных, то оба откладывает в сторону. За какое наименьшее число вытаскиваний Вася заведомо сможет набрать 5 синих шариков?
4. Найдите все натуральные a , b , c и d , для которых справедливо равенство: $a+b+c+d-3 = ab = cd$.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH . На стороне BC отмечена такая точка K , что $KH = KC$. А на стороне AB отмечена такая точка L , что KL — биссектриса угла BKH . Докажите, что $AL = LH$.
6. Верно ли, что среди любых шести натуральных чисел найдется три числа, наименьшее общее кратное которых делится на наибольший общий делитель остальных трех чисел?
7. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca + \frac{3(a-b)^2}{4}$ при любых a , b и c .
8. На острове живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. За круглым столом сидят представители этих племен. Каждый из сидящих за столом произнес две фразы: 1) «Слева от меня сидит лжец.» 2) «Справа от меня сидит хитрец.» Докажите, что за этим столом рыцарей сидит столько же, сколько и лжецов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2011

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca+\frac{3(a-b)^2}{4}$ при любых a, b и c .
2. Найдите все натуральные числа n , квадратный корень из которых равен числу, полученному удалением пяти последних цифр числа n (в десятичной системе счисления).
3. В коробке лежат 10 синих и 10 красных шариков. Вася хочет набрать 5 синих шариков из коробки. Для этого он вслепую вытаскивает по два шарика. Если он вытащил два синих, то берет оба. Если синий и красный, то берет синий, а красный кладет обратно в коробку. Наконец, если он вытащил два красных, то оба откладывает в сторону. За какое наименьшее число вытаскиваний Вася заведомо сможет набрать 5 синих шариков?
4. Найдите все четверки различных натуральных чисел a, b, c и d , для которых выполнено равенство $a+b+c+d-3 = ab = cd$.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH . На стороне BC отмечена такая точка K , что $KH = KC$. А на стороне AB отмечена такая точка L , что KL — биссектриса угла BKH . Докажите, что $AL = LH$.
6. В двух коробках лежат конфеты. Если к коробке подходит Вася, то он берет $1/17$ часть конфет, имеющихся в данный момент в этой коробке, если Петя — то $1/12$, а Коля всегда берет $1/4$ часть. Если у берущего конфеты не получается взять ровно столько, сколько надо, то он воздерживается от сладкого. Вначале в коробках конфет было поровну, по истечении некоторого срока оказалось, что конфет снова поровну. Можно ли утверждать, что каждый из мальчиков лакомился из первой коробки столько же раз, сколько из второй?
7. Можно ли разрезать квадрат на 17 прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон вдвое длиннее другой?
8. На острове живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. За круглым столом сидят представители этих племен. Каждый из сидящих за столом произнес две фразы: 1) «Слева от меня сидит лжец.» 2) «Справа от меня сидит хитрец.» Докажите, что за этим столом рыцарей сидит столько же, сколько и лжецов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2011

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Назовем соседними такие клетки квадрата 6×6 , у которых есть общая сторона или общая вершина. Можно ли так расставить все числа от 1 до 36 в клетках этого квадрата, чтобы разность между числами в любых соседних клетках была не меньше 9?
2. Найдите все натуральные числа $n \geq 100000$ такие, что если отбросить у n пять последних цифр, а затем полученное число возвести в квадрат, то получится снова n . (Квадрат числа — это число, умноженное на себя.)
3. В коробке лежат 10 синих и 10 красных шариков. Вася хочет набрать 5 синих шариков из коробки. Для этого он вслепую вытаскивает по два шарика. Если он вытащил два синих, то берет оба. Если синий и красный, то берет синий, а красный кладет обратно в коробку. Наконец, если он вытащил два красных, то оба откладывает в сторону. За какое наименьшее число вытаскиваний Вася заведомо сможет набрать 5 синих шариков?
4. Верно ли, что среди любых 100 натуральных чисел найдется число, которое делится на наибольший общий делитель всех остальных?
5. В двух коробках лежат конфеты. Если к коробке подходит Вася, то он берет $1/17$ часть конфет, имеющихся в данный момент в этой коробке, если Петя — то $1/12$, а Коля всегда берет $1/4$ часть. Если у берущего конфеты не получается взять ровно столько, сколько надо, то он воздерживается от сладкого. Вначале в коробках конфет было поровну, по истечении некоторого срока оказалось, что конфет снова поровну. Можно ли утверждать, что каждый из мальчиков лакомился из первой коробки столько же раз, сколько из второй?
6. В группе из 25 школьников любые двое имеют общего знакомого. Докажите, что из этой группы можно не менее, чем 36 способами выбрать пару знакомых школьников.
7. На острове живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. За круглым столом сидят представители этих племен. Каждый из сидящих за столом произнес две фразы: 1) «Слева от меня сидит лжец.» 2) «Справа от меня сидит хитрец.» Докажите, что за этим столом рыцарей сидит столько же, сколько и лжецов.

8. Докажите, что для любого целого $n > 4$ квадрат можно разрезать на n прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон вдвое длиннее другой.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2011

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовем соседними такие клетки квадрата 4×4 , у которых есть общая сторона или общая вершина. Можно ли так расставить все числа от 1 до 16 в клетках этого квадрата, чтобы разность между числами в любых соседних клетках была не меньше 3?
2. Найдите все натуральные числа $n \geq 100$ такие, что если отбросить у n две последние цифры, а затем полученное число возвести в квадрат, то получится снова n . (Квадрат числа — это число, умноженное на себя.)
3. В коробке лежат 10 синих и 10 красных шариков. Вася хочет набрать 5 синих шариков из коробки. Для этого он вслепую вытаскивает по два шарика. Если он вытащил два синих, то берет оба. Если синий и красный, то берет синий, а красный кладет обратно в коробку. Наконец, если он вытащил два красных, то оба откладывает в сторону. За какое наименьшее число вытаскиваний Вася заведомо сможет набрать 5 синих шариков?
4. Верно ли, что среди любых четырех натуральных чисел найдется число, которое делится на наибольший общий делитель всех остальных?
5. В двух коробках лежат конфеты. Если к коробке подходит Вася, то он берет $\frac{1}{3}$ часть конфет, имеющихся в данный момент в этой коробке, если Петя — то $\frac{1}{5}$. Если у берущего конфеты не получается взять ровно столько, сколько надо, то он воздерживается от сладкого. Вначале в коробках конфет было поровну, по истечении некоторого срока оказалось, что конфет снова поровну. Можно ли утверждать, что каждый из мальчиков лакомился из первой коробки столько же раз, сколько из второй?
6. В группе из 7 школьников любые двое имеют общего знакомого. Докажите, что из этой группы можно не менее, чем 9 способами выбрать пару знакомых школьников.
7. На острове живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. За круглым столом сидят представители этих племен. Каждый из сидящих за столом произнес две фразы: 1) «Слева от меня сидит лжец.» 2) «Справа от меня сидит хитрец.» Докажите, что за этим столом рыцарей сидит столько же, сколько и лжецов.
8. Можно ли разрезать квадрат на 17 прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон вдвое длиннее другой?