

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. У четырехзначного числа X взяли две последние цифры, поменяли их местами и полученное двузначное число прибавили к X . Получилось число 2011. Чему могло быть равно число X ? Двузначное число не может начинаться с нуля.
2. На доску выписали 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 11 чисел делятся на 13, а 13 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 500.
3. Семь футбольных команд провели турнир в один круг, причем каждая команда ровно два матча выиграла и ровно два проиграла. Могло ли такое случиться, что никакие 3 команды не выиграли друг у друга по циклу (то есть нет трёх таких команд A , B и C , что A выиграла у B , B — у C , а C — у A)?
4. На окружности расположено 100 точек. Каждая точка окрашена в один из двух цветов. Оказалось, что количество прямых, соединяющих разноцветные точки, равно количеству прямых, соединяющих одноцветные точки. Сколько всего точек каждого из цветов может быть?
5. Каким наименьшим количеством коней можно побить все черные поля доски 9×9 , угловые поля которой — чёрные?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Маша первый вторник месяца провела в Кирове, а первый вторник после первого понедельника этого же месяца она была в Казани. В первую среду следующего месяца Маша была в Вологде, а первую среду после первого вторника того же месяца она провела в Костроме. Где Маша в том году была 8 марта?
2. Дан клетчатый квадрат 11×11 . Его клетки покрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета, причем углы квадрата черные. Можно ли в этом квадрате разместить несколько квадратинов 3×3 с вырезанной центральной клеткой так, чтобы каждая белая клетка исходного квадрата была покрыта ровно один раз?
3. Даны 20 различных натуральных чисел. Девять из них делятся на 19, восемь из них делятся на 18, семь из них делятся на 17. Докажите, что одно из них больше 600.
4. Квадраты $ABCD$ и $DEFG$ таковы, что точка E лежит на отрезке CD , а точка D — на отрезке AG . Прямые AC и EG пересекаются в точке H . Докажите, что точки B, F, H лежат на одной прямой.
5. Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^6 - q^2 = (p - q)^2 / 2$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Сложили числа 9, 99, 999, ..., 99...99 (2011 девяток). Сколько единиц в записи получившейся суммы?
2. Дан клетчатый прямоугольник 2009×2013 . Его клетки покрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета, причем углы квадрата черные. Можно ли в этом квадрате разместить несколько квадратинов 3×3 с вырезанной центральной клеткой так, чтобы каждая белая клетка исходного квадрата была покрыта ровно один раз?
3. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A треугольника ABC на биссектрисы углов B и C . Докажите, что прямые DE и BC параллельны.
4. Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^6 - q^2 = (p - q)^2 / 2$.
5. Докажите, что при любых положительных a , b и c выполнено неравенство
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq \left(a + b + c \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. У четырехзначного числа X взяли две последние цифры, поменяли их местами и полученное двузначное число прибавили к X . Получилось число 2011. Чему могло быть равно число X ? Двузначное число не может начинаться с нуля.

Ответ: 2010. **Решение.** По условию $2011 = \overline{abcd} + \overline{dc} = \overline{ab00} + \overline{cd} + \overline{dc} = \overline{ab00} + 11(c+d)$, откуда $\overline{ab00} = 2000 - 11(c+d-1)$. Поскольку $c+d < 19$, $11(c+d-1)$ делится на 100 только при $c+d = 1$, то есть при $c = 0$, $d = 1$ или $c = 1$, $d = 0$. Второй случай невозможен, так как двузначное число не может начинаться с нуля, а первый дает ответ.

Задача 2. На доску выписали 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 11 чисел делятся на 13, а 13 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 500.

Решение. Так как 11 и 13 — простые числа, числа, делящиеся на 11 и 13 одновременно, делятся на $11 \cdot 13$. Легко видеть, что среди выписанных есть по крайней мере четыре таких числа. Наибольшее из них не меньше, чем $4 \cdot 11 \cdot 13 > 500$.

Задача 3. Семь футбольных команд провели турнир в один круг, причем каждая команда ровно два матча выиграла и ровно два проиграла. Могло ли такое случиться, что никакие 3 команды не выиграли друг у друга по циклу (то есть нет трёх таких команд A , B и C , что A выиграла у B , B — у C , а C — у A)?

Ответ. Могло. **Решение.** Изобразим команды семью точками на окружности и будем считать, что каждая команда выиграла у двух следующих за ней по часовой стрелке. Тогда если команда A выиграла у B , а B — у C , то между C и A по часовой стрелке не меньше двух команд, и C у A выиграть не могла.

Задача 4. На окружности расположено 100 точек. Каждая точка окрашена в один из двух цветов. Оказалось, что количество прямых, соединяющих разноцветные точки, равно количеству прямых, соединяющих одноцветные точки. Сколько всего точек каждого из цветов может быть?

Ответ. 45 одного цвета и 55 другого. **Решение.** Пусть у нас есть a точек одного цвета и $100-a$ другого. Всего прямых, соединяющих различные точки, у нас $100 \cdot 99 / 2 = 50 \cdot 99$. Поэтому прямых, соединяющих разноцветные точки, должно быть $a \cdot (100-a) = 25 \cdot 99$ (и это равносильно утверждению задачи). Так как 25 делится на простое число 5, одно из чисел a и $100-a$ должно делиться на 5. Но тогда, поскольку 100 делится на 5, на 5 должно делиться и другое из этих чисел. Так как 99 делится на простое число 3, одно из чисел a и $100-a$ должно делиться на 3. Поскольку 100 не делится на 3, другое из этих чисел на 3 не делится, поэтому одно из чисел a и $100-a$ должно делиться на 9, а, значит, и на 45. Поскольку оба числа a и $100-a$ нечетны и меньше 100, это число может равняться только 45. Тогда другое равно 55.

Задача 5. Каким наименьшим количеством коней можно побить все черные поля доски 9×9 , угловые поля которой — чёрные?

Ответ: 10. **Решение.** Заметим, что пять полей, помеченных единицами, можно побить, самое меньшее, тремя конями. Еще минимум три коня понадобятся, чтобы побить поля, отмеченные двойками, и по два коня — на поля, отмеченные тройками и четверками (легко видеть, что один конь бить поля, отмеченные разными цифрами, не может). Поэтому коней потребуется не меньше 10. Десятью конями побить все черные клетки можно, если, например, поставить их на поля, отмеченные звездочками на рисунке справа. (и этот пример — далеко не единственный).

1		1						3
	1	*						3
1		1	*				*	
				*		*		
		*				*		
						2		2
	4	*		*		*	2	
4						2		2

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. Маша первый вторник месяца провела в Кирове, а первый вторник после первого понедельника этого же месяца она была в Казани. В первую среду следующего месяца Маша была в Вологде, а первую среду после первого вторника того же месяца она провела в Костроме. Где Маша в том году была 8 марта?

Ответ. В Костроме. Решение. Поскольку вторник, который Маша провела в Казани, не был первым вторником этого месяца, а понедельник перед ним был первым понедельником этого месяца, этот месяц начинался со вторника. По аналогичной причине следующий месяц начинался со среды. Но такое возможно только если в предыдущем месяце было 29 дней. Значит, предыдущий месяц — февраль, 1 марта Маша была в Вологде, а 8 марта — в Костроме.

Задача 2. Дан клетчатый квадрат 11×11 . Его клетки покрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета, причем углы квадрата черные. Можно ли в этом квадрате разместить несколько квадратиков 3×3 с вырезанной центральной клеткой так, чтобы каждая белая клетка исходного квадрата была покрыта ровно один раз?

Ответ. Можно. Решение. Назовем квадратик 3×3 с вырезанной центральной клеткой *рамкой*. Квадрат 4×4 покрывается с соблюдением условия задачи двумя рамками с центрами на черной диагонали. Покроем два противоположных угла и центр квадрата 11×11 тремя рамками, а оставшуюся часть квадрата — восемью квадратами 4×4 , прилегающими по два к сторонам квадрата, каждый из которых покрыт двумя рамками. Легко проверить, что любые два квадрата 4×4 либо не пересекаются, либо пересекают по одной черной клетке.

Задача 3. Даны 20 различных натуральных чисел. Девять из них делятся на 19, восемь из них делятся на 18, семь из них делятся на 17. Докажите, что одно из них больше 600.

Решение. Заметим, что любые два из чисел 17, 18 и 19 взаимно просты. Поэтому если есть число, которое делится на два или три из них, то оно делится и на произведение этих двух или трёх. Поставим около каждого данного числа, делящегося на 17, красный крестик, делящегося на 18 — синий крестик, делящегося на 19 — зеленый крестик. Всего будет выставлено 24 крестика. Если есть число с тремя крестиками, то оно делится и на $17 \cdot 18 \cdot 19 > 600$, и все доказано. Если же такого числа нет, то есть четыре числа с двумя крестиками. Поскольку из трех цветов можно составить только три различные пары, среди этих четырех чисел найдутся два, у которых цвета крестиков одинаковы. Тогда наибольшее из этих двух чисел не меньше, чем $2 \cdot 17 \cdot 18$, что больше 600.

Задача 4. Квадраты $ABCD$ и $DEFG$ таковы, что точка E лежит на отрезке CD , а точка D — на отрезке AG . Прямые AC и EG пересекаются в точке H . Докажите, что точки B , F , H лежат на одной прямой.

Решение. Пусть стороны квадратов $ABCD$ и $DEFG$ равны a и b соответственно. Как легко видеть, SHE — равнобедренный прямоугольный треугольник с основанием SE . Опустим из точки H перпендикуляры HK и HL на BC и CD соответственно. Очевидно, $KC = CL = (a-b)/2$. Пусть M — точка пересечения прямых BC и GF . Тогда $KM = KC + CM = (a-b)/2 + b = (a+b)/2 = a - (a-b)/2 = BK$. Пусть KN — средняя линия треугольника BMF . Она лежит на луче KH и равна $MF/2 = (a-b)/2 = KH$. Значит, точки N и H совпадают, что и требовалось доказать.

Задача 5. Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^6 - q^2 = (p-q)^2/2$.

Ответ. $p = 3$, $q = 23$. Решение. Раскрыв скобки в правой части и умножив обе части на 2, получим $2p^6 - 2q^2 = p^2 - 2pq + q^2$, откуда $3q^2 = 2p^6 - p^2 + 2pq$ (*). Получается, что $3q^2$ делится на p . Поскольку p и q просты и, очевидно, различны, $p = 3$. Подставляя $p = 3$ в (*) и деля обе части на 3, после преобразований получаем $q^2 - 2q = 483$, то есть $q(q-2) = 483$. Перебором нетрудно убедиться, что число 483 можно представить в виде произведения двух сомножителей, отличающихся на 2, единственным способом $483 = 23 \cdot 21$, откуда и получается ответ.

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. Сложили числа 9, 99, 999, ..., 99...99 (2011 девяток). Сколько единиц в записи получившейся суммы?

Ответ: 2007. **Решение.** Сумма равна $(10-1)+(100-1)+\dots+(10^{2011}-1) = 11\dots110-2011 = 11\dots1109099$, где в числе 11...110 — 2011 единиц, и, следовательно, в числе 11...1109099 — 2007 единиц.

Задача 2. Дан клетчатый квадрат 2009×2013 . Его клетки покрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета, причем углы квадрата черные. Можно ли в этом квадрате разместить несколько квадратиков 3×3 с вырезанной центральной клеткой так, чтобы каждая белая клетка исходного квадрата была покрыта ровно один раз?

Ответ: Нельзя. **Решение.** Каждый квадратик с вырезанной центральной клеткой покрывает 4 белых клетки. Но в прямоугольнике 2009×2013 с черными углами $(2009 \times 2013 - 1)/2$ белых клеток, а это число, как легко проверить, не делится на 4.

Задача 3. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A треугольника ABC на биссектрисы углов B и C . Докажите, что прямые DE и BC параллельны.

Решение. Пусть A_1 — точка, симметричная A относительно биссектрисы угла B . Заметим, что точка A_1 лежит на прямой BC , так как прямые BA и BC симметричны относительно биссектрисы угла между ними. Аналогично точка A_2 , симметричная A относительно биссектрисы угла C , лежит на прямой BC . В треугольнике AA_1A_2 точки D и E — середины сторон AA_1 и AA_2 соответственно. Поэтому его средняя линия DE параллельна прямой A_1A_2 , которая совпадает с прямой BC .

Задача 4. Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^6 - q^2 = (p - q)^2/2$.

Ответ. $p = 3, q = 23$. **Решение.** Раскрыв скобки в правой части и умножив обе части на 2, получим $2p^6 - 2q^2 = p^2 - 2pq + q^2$, откуда $3q^2 = 2p^6 - p^2 + 2pq$ (*). Получается, что $3q^2$ делится на p . Поскольку p и q просты и, очевидно, различны, $p = 3$. Подставляя $p = 3$ в (*) и деля обе части на 3, после преобразований получаем $q^2 - 2q - 483 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни -21 и 23 , из которых простым числом является второй.

Задача 5. Докажите, что при любых положительных a, b и c выполнено неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq \left(a + b + c\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Решение. Раскрыв скобки и собрав все члены, содержащие переменные, в левой части неравенства, его нетрудно затем привести к виду

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 6.$$

Осталось заметить, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$ и, аналогично, $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \geq 3$.