**КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 02.11.2010**

# ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

**1.** Тракторист Вася поехал на своем тракторе в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10 км/ч. Когда Вася проехал ровно треть всего пути он понял, что если будет ехать с прежней скоростью, то успеет точно к закрытию магазина и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, трактор сломался и оставшуюся часть пути Вася прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

**2.** По кругу сидят 10 котов, все разные по толщине. Дядя Федя выбрал каких-то трех котов, сидящих подряд, и дал самому тощему сосиску. Хулиган Вася тоже выбрал каких-то трех котов, сидящих подряд, и дал самому толстому сосиску. Наконец, отличница Таня выбрала 5 котов, сидящих через одного, и дала по сосиске самому тощему и самому толстому из них. Докажите, что ни один кот не съел больше двух сосисок. (Можно считать, что от съедания сосиски толщина кота не меняется).

**3.** Вася выписал на доску натуральное число, большее 100. Если сумма каких-то двух различных натуральных чисел уже выписана Васей, то он может дописать на доску произведение этих чисел. Докажите, что Вася может действовать так, что через некоторое время он выпишет на доску число 2010.

**4.** Можно ли на листе клетчатой бумаги нарисовать замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая проходит по сторонам клеток и в каждой вершине, через которую она проходит, кроме одной, поворачивает под прямым углом, а через оставшуюся вершину проходит напрямую?

**5.** Натуральные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют равенству $a+201b = 200c$. Докажите, что число $(a+b)(a+c)$ делится на 2010.

**6.** На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. После конгресса оказалось, что каждому участнику понравилось не менее 51 доклада коллег. Докажите, что есть такие ученые A, B и C, присутствовавшие на конгрессе, что A понравился доклад B, B понравился доклад C, а C понравился доклад A.

XXXVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. МАГНИТОГОРСК, 21-27.02.2010

**КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 02.11.2010**

# ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

**1.** Вася, Коля, Петя и Степа — ученики 4-го, 5-го, 6-го, и 7-го классов — отправились в лес за грибами. Пятиклассник не нашел ни одного белого гриба, а Петя и ученик 4-го класса по 8 штук. Вася и пятиклассник нашли много подосиновиков и позвали Колю в компанию. Семиклассник и Коля смеялись над Петей, сорвавшим мухомор. Кто в каком классе учится?

**2.** Вася выписал на доску натуральное число, большее 100. Если сумма каких-то двух различных натуральных чисел уже выписана Васей, то он может дописать на доску произведение этих чисел. Докажите, что Вася может действовать так, что через некоторое время он выпишет на доску число 2010.

**3.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ отмечены точки $D$ и $E$ ($D$ лежит между $A$ и $E$), а на стороне $BC$ — точка $F$, такие, что $BE = BF = DF$ и $AD = CF$. Докажите, что $BC > AE$.

**4.** Натуральные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют равенству $a+268b = 270c$. Докажите, что число $(a-2b)(a-2c)$ делится на 2010.

**5.** Пусть $x, y > 0$. Докажите, что $\dfrac{x^2}{x+y} \geq \dfrac{3x-y}{4}$.

**6.** Клетки бесконечной в одну сторону клетчатой полоски занумерованы по порядку слева направо, начиная с 1. В начале в первой и второй клетках лежит по монете. Если монета лежит в $k$-й клетке, ее можно сдвинуть на $k$ пустых клеток вправо. Докажите, что для каждого натурального $N$ можно поставить монету в $N$-ю клетку.

**7.** На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. После конгресса каждый его участник заявил, что ему понравилось не менее 83 докладов, сделанных его коллегами на конгрессе. Докажите, что найдутся трое ученых, каждому из которых понравились доклады двух других.

**КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 02.11.2010**

# ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

**1.** У Танечки четыре платья, в том числе любимое синее. Каждый день в одном из них она идет в детский садик. Известно, что в любые 7 дней подряд она надевала одно и то же платье не больше двух раз. Докажите, что были три дня подряд, когда она не надевала свое любимое платье.

**2.** Докажите, что если $a$, $b$, $c$ — натуральные числа такие, что $3a+1004b+2006c = 0$, то число $N = 2ac-3a^2$ делится на 2008.

**3.** На боковых сторонах $AB$ и $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ отмечены точки $M$ и $N$ соответственно так, что $AM = NC$. Точки $P$ и $Q$ — середины отрезков $NB$ и $CM$ соответственно. Докажите, что $2PQ = MN$.

**4.** Докажите, что если $bc \geq 0$, то $(b+c)^2(b^4+c^4) \geq (b^2+c^2)^3$.

**5.** Клетки бесконечной в одну сторону клетчатой полоски занумерованы по порядку слева направо, начиная с 1. В начале в первой и второй клетках лежит по монете. Если монета лежит в $k$-й клетке, ее можно сдвинуть на $k$ пустых клеток вправо. Докажите, что для каждого натурального $N$ можно поставить монету в $N$-ю клетку.

**6.** Целые числа $x$ и $y$ удовлетворяют условию $9x^2+6xy-6y^2 = x-y$. Докажите, что число $x-y$ — квадрат целого числа.

**7.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = AC$) с углом 20° при вершине $A$ точка $E$ на стороне $AC$ выбрана таким образом, что $\angle ABE = 30°$, а точка $F$ на стороне $AB$ таким образом, что $EF = FC$. Докажите, что треугольник $EFC$ — равносторонний.

**8.** На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. В конце каждый заявил, что ему понравилось ровно 75 докладов, сделанных его коллегами на конгрессе. Докажите, что найдутся трое, каждому из которых понравились доклады двух других.

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ»

**Задача 1.** *Тракторист Вася поехал на своем тракторе в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10 км/ч. Когда Вася проехал ровно треть всего пути он понял, что если будет ехать с прежней скоростью, то успеет точно к закрытию магазина и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, трактор сломался и оставшуюся часть пути Вася прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?*

Ответ: 20/3 км/ч. Решение. Пусть когда Вася проехал треть пути, до закрытия магазина оставалось $4t$ часов. Увеличив скорость вдвое, Вася вторую треть пути проехал вместо $2t$ за $t$ часов. Стало быть, оставшуюся треть пути он шёл $3t$ часов. Поэтому он шёл втрое медленнее, чем 20 км/ч, то есть 20/3 км/ч.

**Задача 2.** *По кругу сидят 10 котов, все разные по толщине. Дядя Федя выбрал каких-то трех котов, сидящих подряд, и дал самому тощему сосиску. Хулиган Вася тоже выбрал каких-то трех котов, сидящих подряд, и дал самому толстому сосиску. Наконец, отличница Таня выбрала 5 котов, сидящих через одного, и дала по сосиске самому тощему и самому толстому из них. Докажите, что ни один кот не съел больше двух сосисок. (Можно считать, что от съедания сосиски толщина кота не меняется).*

Решение. Допустим, Федя и Вася дали по сосиске одному и тому же коту Моте. Тогда Мотя одновременно самый толстый из каких-то трёх сидящих подряд котов и самый тонкий из каких-то трёх сидящих подряд котов. Такое возможно только если два кота из первой тройки сидят с одной стороны от Моти, а два кота из второй тройки — с другой. Но в этом случае Мотя худее одного из котов, сидящих от него через одного, и толще другого, значит, сосиски от Тани ему не достанется. Если же Мотя получил от Феди и Васи не больше одной сосиски, то всего ему тоже достанется не больше двух сосисок, что и требовалось доказать.

**Задача 3.** *Вася выписал на доску натуральное число, большее 100. Если сумма каких-то двух различных натуральных чисел уже выписана Васей, то он может дописать на доску произведение этих чисел. Докажите, что Вася может действовать так, что через некоторое время он выпишет на доску число 2010.*

Решение. Поскольку всякое $n$ равно сумме 1 и $n$–1, Вася может вместе с выписанным первоначально числом $n$ выписать на доску $n$–1, потом — $n$–2 и т.д., то есть все меньшие натуральные числа. Если среди них есть 2010 — всё в порядке. Пусть нет. Тогда выпишем число $n\times(n-1)$. Поскольку уже 100×99 больше, чем 2010, выписывая все натуральные, меньшие, чем $n\times(n-1)$, мы обязательно выпишем 2010.

**Задача 4.** *Можно ли на листе клетчатой бумаги нарисовать замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая проходит по сторонам клеток и в каждой вершине, через которую она проходит, кроме одной, поворачивает под прямым углом, а через оставшуюся вершину проходит напрямую?*

Ответ: Нет. Решение. Обойдём ломаную и вернёмся в исходную точку. Тогда влево мы прошли столько же сторон клеток, сколько и вправо, а вверх — столько же, сколько и вниз. Получается, что длина нашей ломаной чётна. Теперь уберём одно из двух соседних звеньев ломаной, лежащих на одной прямой (будем считать её горизонтальной), и обойдём оставшуюся часть ломаной, начиная с горизонтального звена, соседнего с удалённым, и нумеруя звенья подряд. Тогда все звенья с нечётными номерами будут горизонтальными, а все звенья с чётными номерами — вертикальными. Так как последнее звено будет вертикальным, после удаления у нас осталось чётное число звеньев. Значит, до удаления их было нечётное число. Противоречие.

**Задача 5.** *Натуральные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют равенству $a+201b = 200c$. Докажите, что число $(a+b)(a+c)$ делится на 2010.*

Решение. Условие задачи можно переписать в виде $a+b = 200(c-b)$. Таким образом, $a+b$ делится на 200. Кроме того, из условия следует, что $a+c = 201(c-b)$. Поэтому $a+c$ делится на 201. Следовательно, $(a+b)(a+c)$ делится на 200×201 = 40200. Стало быть, оно делится на 2010 — делитель числа 40200.

**Задача 6.** *На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. После конгресса оказалось, что каждому участнику понравилось не менее 51 доклада коллег. Докажите, что есть такие ученые A, B, и C, присутствовавшие на конгрессе, что A понравился доклад B, B понравился доклад C, а C понравился доклад A.*

Решение. Отметим учёных точками и проведём стрелки от каждого ко всем, чьи доклады ему понравились. Поскольку из каждой точки выходит не менее 51 стрелки, всего их не менее, чем 5100, и найдётся точка A, в которую входит не менее 51 стрелки. Обозначим через X совокупность всех точек, из которых выходят стрелки в A. Теперь возьмём любого ученого B, доклад которого нравится A. При этом если он входит в X — исключим его оттуда. Обозначим через Y совокупность всех учёных, доклады которых нравятся B. Если туда входит A — вычеркнем его оттуда. После всего этого в X и в Y останется не меньше, чем по 50 человек, а всего в X и Y будет не больше 98 человек — ведь A и B мы оттуда убрали. Поэтому есть учёный C, который входит и в X, и в Y. Очевидно, что учёные A, B и C — искомые.

XXXVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. МАГНИТОГОРСК, 21-27.02.2010

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ МЛАДШЕЙ ГРУППЫ

**Задача 1.** *Вася, Коля, Петя и Степа — ученики 4-го, 5-го, 6-го, и 7-го классов — отправились в лес за грибами. Пятиклассник не нашел ни одного белого гриба, а Петя и ученик 4-го класса по 8 штук. Вася и пятиклассник нашли много подосиновиков и позвали Колю в компанию. Семиклассник и Коля смеялись над Петей, сорвавшим мухомор. Кто в каком классе учится?*

Ответ: В четвёртом классе учится Коля, в пятом — Стёпа, в шестом — Петя, в седьмом — Вася. Решение. Из условия сразу видно, что пятиклассник — не Петя, не Вася и не Коля. Значит, пятиклассник — Стёпа. Семиклассник — не Коля и не Петя. Значит, семиклассник — Вася. Четвероклассник — не Петя. Значит, это — Коля, а Петя — шестиклассник.

**Задача 2.** *Вася выписал на доску натуральное число, большее 100. Если сумма каких-то двух различных натуральных чисел уже выписана Васей, то он может дописать на доску произведение этих чисел. Докажите, что Вася может действовать так, что через некоторое время он выпишет на доску число 2010.*

Решение. Поскольку всякое $n$ равно сумме 1 и $n$–1, Вася может вместе с выписанным первоначально числом $n$ выписать на доску $n$–1, потом — $n$–2 и т.д., то есть все меньшие натуральные числа. Если среди них есть 2010 — всё в порядке. Пусть нет. Тогда выпишем число $n\times(n-1)$. Поскольку уже $100\times99$ больше, чем 2010, выписывая все натуральные, меньшие, чем $n\times(n-1)$, мы обязательно выпишем 2010. Замечание. 2010 можно получить и быстрее, перемножив 67 и 30.

**Задача 3.** *На стороне AB треугольника ABC отмечены точки D и E (D лежит между A и E), а на стороне BC — точка F, такие, что BE = BF = DF и AD = CF. Докажите, что BC > AE.*

Решение. $BC > AE \Leftrightarrow BF+CF > AD+DE \Leftrightarrow BF > DE \Leftrightarrow DF > DE \Leftrightarrow \angle DEF > \angle DFE \Leftrightarrow 180° - \angle FEB > \angle DFB - \angle EFB \Leftrightarrow 180° > \angle DFB$. Последнее неравенство очевидно.

**Задача 4.** *Натуральные числа a, b, c удовлетворяют равенству a+268b = 270c. Докажите, что число (a–2b)(a–2c) делится на 2010.*

Решение. Условие задачи можно переписать в виде $a-2b = 270(c-b)$, а также в виде $a-2c = 268(c-b)$. Перемножив два этих равенства, получим $(a-2b)(a-2c) = 27\times10\times67\times4(c-b)^2 = 2010\times36(c-b)^2$.

**Задача 5.** *Пусть x, y > 0. Докажите, что* $\dfrac{x^2}{x+y} \geq \dfrac{3x-y}{4}$.

Решение. Неравенство из условия равносильно неравенству $4x^2 \geq (x+y)(3x-y)$. Заметим, что произведение в правой части равно $(2x-(x-y))(2x-(x-y)) = 4x^2-(x-y)^2$, что, очевидно, не превосходит $4x^2$.

**Задача 6.** *Клетки бесконечной в одну сторону клетчатой полоски занумерованы по порядку слева направо, начиная с 1. В начале в первой и второй клетках лежит по монете. Если монета лежит в k-й клетке, ее можно сдвинуть на k пустых клеток вправо. Докажите, что для каждого натурального N можно поставить монету в N-ю клетку.*

Решение. Докажем по индукции, что мы можем поставить монету на любую клетку, начиная со второй, так, что другая монета будет левее. Для второй клетки это очевидно. Пусть мы уже доказали это для всех клеток от 2 до $k$. Если $k = 2n+1$, поставим монету на клетку $n+1$ и следующим ходом продвинем на клетку $2n+2$, поскольку все клетки справа пусты. Если $k = 2n$, поставим монету на клетку $n$, а потом будем двигать вторую монету, пока она не окажется правее первой. При это вторая монета, очевидно, попадёт на одну из клеток с номерами от $n+1$ до $2n$, так как на последнем ходу она сдвигалась не более, чем на $n$. Поэтому когда мы затем сделаем ход первой монетой, она попадёт на клетку $2n+1$.

**Задача 7.** *На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. После конгресса каждый его участник заявил, что ему понравилось не менее 83 докладов, сделанных его коллегами на конгрессе. Докажите, что найдутся трое ученых, каждому из которых понравились доклады двух других.*

Решение. Отметим учёных точками и проведём стрелки от каждого ко всем, чьи доклады ему *не* понравились. Всего получится не больше, чем $16\times100 = 1600$ стрелок. Всевозможных троек учёных у нас $100\times99\times98/6 = 100\times33\times49$. Каждая стрелка входит в 98 троек учёных, поэтому 1600 стрелок «портят», самое большее, $1600\times98 < 100\times33\times49$ троек. Стало быть, есть тройка без стрелок, что и требовалось доказать.

XXXVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. МАГНИТОГОРСК, 21-27.02.2010

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ СТАРШЕЙ ГРУППЫ

**Задача 1.** *У Танечки четыре платья, в том числе любимое синее. Каждый день в одном из них она идет в детский садик. Известно, что в любые 7 дней подряд она надевала одно и то же платье не больше двух раз. Докажите, что были три дня подряд, когда она не надевала свое любимое платье.*

Решение. Допустим, это не так. Возьмём какой-нибудь день, когда Таня надела синее платье, и рассмотрим следующие 6 дней. Таня надевала платье как в первые три из них, так и в последние три. Получаются 7 дней подряд, когда Таня надевалка синее платье по крайней мере трижды. Противоречие.

**Задача 2.** *Докажите, что если a, b, c — натуральные числа такие, что* $3a+1004b+2006c = 0$, *то число* $N = 2ac–3a^2$ *делится на 2008.*

Решение. Заметим, что $n = 2ac–3a^2 = a(2c–3a) = a(1004b+2008c) = 1004a(b+2c)$. Легко видеть, что число $a$ четно, откуда и следует, что $n$ делится на 2008.

**Задача 3.** *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что AM = NC. Точки P и Q — середины отрезков NB и CM соответственно. Докажите, что 2PQ = MN.*

Решение. Пусть точка $K$ —– середина стороны $BC$. Тогда отрезок $KP$ параллелен $NC$ и в два раза короче, а $KQ$ параллелен $BM$ и в два раза короче. Из параллельности следует, что углы $QKP$ и $BAC$ равны. Так как при этом $KP = CN/2 = AM/2$ и $KQ = BM/2 = AN/2$, треугольники $NAM$ и $PKQ$ подобны с коэффициентом 1/2, откуда $MN = PQ/2$.

**Задача 4.** *Докажите, что если* $bc \ge 0$, *то* $(b+c)^2(b^4+c^4) \ge (b^2+c^2)^3$.

Решение. Раскроем в исходном неравенстве скобки: $(b^2+2bc+c^2)(b^4+c^4) = b^6+c^6+b^4c^2+b^2c^4+2bc(b^4+c^4) \ge b^6+c^6+3b^2c^2(b^2+c^2)$. После приведения подобных и сокращения на $bc$ (случай $bc = 0$ очевиден) получаем: $b^3c+bc^3+2(b^4+c^4) \ge 3bc(b^2+c^2)$ что равносильно $b^4+c^4 \ge b^3c+bc^3$. Осталось заметить, что $b^4+c^4–b^3c–bc^3 = (b–c)(b^3–c^3) = (b–c)2(b^2–bc+c^2) \ge 0$.

**Задача 5.** *Клетки бесконечной в одну сторону клетчатой полоски занумерованы по порядку слева направо, начиная с 1. В начале в первой и второй клетках лежит по монете. Если монета лежит в k-й клетке, ее можно сдвинуть на k пустых клеток вправо. Докажите, что для каждого натурального N можно поставить монету в N-ю клетку.*

Решение. Докажем по индукции, что мы можем поставить монету на любую клетку, начиная со второй, так, что другая монета будет левее. Для второй клетки это очевидно. Пусть мы уже доказали это для всех клеток от 2 до $k$. Если $k = 2n+1$, поставим монету на клетку $n+1$ и следующим ходом продвинем на клетку $2n+2$, поскольку все клетки справа пусты. Если $k = 2n$, поставим монету на клетку $n$, а потом будем двигать вторую монету, пока она не окажется правее первой. При это вторая монета, очевидно, попадёт на одну из клеток с номерами от $n+1$ до $2n$, так как на последнем ходу она сдвигалась не более, чем на $n$. Поэтому когда мы затем сделаем ход первой монетой, она сдвинется на $n+1$ клетку и попадёт на клетку $2n+1$.

**Задача 6.** *Целые числа x и y удовлетворяют условию* $9x^2+6xy–6y^2 = x–y$. *Докажите, что число x–y — квадрат целого числа.*

Решение. Равенство из условия задачи приводится к виду $9x^2 = (x–y)(1–6y)$. Предположим, что у чисел $x–y$ и $1–6y$ есть общий простой делитель $p$. Тогда $9x^2$ тоже делится на $p$, причём $p$ не равно 3, так как $1–6y$ не делится на 3. Следовательно, $x$ делится на $p$. Но тогда $x–(x–y) = y$ и $1 = (1–6y)+6y$ тоже делятся на $p$, что невозможно. Таким образом, числа
$x–y$ и $1–6y$ взаимно просты, то есть они либо оба квадраты (что нас устраивает), либо $1–6y = –t^2 \Leftrightarrow t^2 = 6y–1$, что невозможно, потому что квадраты не могут давать остаток 2 при делении на 3.

**Задача 7.** *В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) с углом 20° при вершине A точка E на стороне AC выбрана таким образом, что* $\angle ABE = 30°$, *а точка F на стороне AB таким образом, что EF = FC. Докажите, что треугольник EFC — равносторонний.*

Решение. Из равенства $\angle CBE = 50° = \angle BEC$ (так как $\angle ACB = 80°$), получаем, что $CB = CE$. Рассмотрим такую точку $G$ на стороне $AB$, что $\angle GCB = 20°$ Заметим, что $\angle CBA = CGB = 80°$, откуда $CG = CB = CE$. Значит, треугольник $CEG$ — равнобедренный с углом $\angle GCE = 60°$, то есть равносторонний. Таким образом, точка $G$, как и точка $F$, лежит на серединном перпендикуляре отрезка $CE$ и на стороне $AB$. Значит, точки $G$ и $F$ совпадают, и треугольник $EFC$ —– равносторонний, что и требовалось доказать.

**Задача 8.** *На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. В конце каждый заявил, что ему понравилось ровно 75 докладов, сделанных его коллегами на конгрессе. Докажите, что найдутся трое, каждому из которых понравились доклады двух других.*

Решение. Будем говорить, что ученые A и B *взаимны*, если им понравились доклады друг друга. Рассмотрим ученого A, доклад которого понравился наибольшему количеству его коллег (их, как минимум, 75). Рассмотрим всех, кому понравился доклад A, и всех, чьи доклады понравились A. Так как тех и других не менее, чем по 75, а всего ученых, кроме A, ровно 99, то найдется хотя бы 51 человек, взаимный с A. Возьмём группу из ровно 51 такого учёного (назовем её s). Для любого ученого из s найдется как минимум 75–49 = 26 ученых из s, доклады которых ему понравились. Рассмотрим в s такого ученого B, доклад которого понравился наибольшему числу его коллег из s. Таких будет не менее 26. Тогда так как B понравились не менее, чем 26 докладов из s, среди учёных из s найдется C, который взаимен с B. Тогда A, B и C попарно взаимны, что и требовалось доказать.