

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2010

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Через точку P на стороне AC треугольника ABC проведена прямая, параллельная медиане AM , которая пересекает сторону BC в точке E , и прямая, параллельная медиане CN , которая пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что медианы AM и CN разбивают отрезок EF на три равные части.
2. Конечное множество целых чисел называется *плохим*, если сумма его элементов равна 2010. Множество называется *пальцатым*, если все его подмножества не являются плохими. На какое наименьшее количество пальцатых подмножеств можно разбить множество $\{502, 503, 504, \dots, 2009\}$?
3. В олимпиаде участвовали 25 школьников. Им были предложены 3 задачи. Каждый участник решил хотя бы одну задачу. Среди тех, кто не решил задачу 1, было вдвое больше решивших задачу 2, чем не решивших задачу 3. Тех, кто решил только задачу 1, было на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу 1. Наконец, среди тех, кто решил только одну задачу, половина не решила задачу 1. Сколько участников решило задачу 1?
4. В вершинах куба стоят натуральные числа. Разрешается взять число в вершине и прибавить его к числу в соседней вершине. Докажите, что такими операциями можно добиться, чтобы все числа в вершинах куба давали одинаковые остатки при делении на 2010.
5. У Андреа и Бруно есть доска 11×9 (9 столбцов, 11 строк). Сначала Андреа произвольным образом разбивает эту доску на 33 полосы 1×3 . Затем Бруно вписывает в каждую клетку одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы сумма чисел в каждой полоске 1×3 была равна 5. Если сумма чисел в каждом из 9 столбцов — простое число, то Бруно выигрывает. В противном случае выигрывает Андреа. Кто из игроков может обеспечить себе победу?
6. Последовательность $\{a_i\}$ задается следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geq 2$. Докажите, что $a_{2n-1} - (-1)^n$ делится на a_n .
7. Положительные числа a , b и c и некоторые числа x , y , z удовлетворяют условиям $cy + bz = a$, $cx + az = b$ и $bx + ay = c$. Докажите, что a , b и c являются сторонами треугольника тогда и только тогда, когда x , y и z по модулю меньше 1.
8. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) пересекаются под прямым углом в точке O . Точки M и N расположены на лучах OA и OB соответственно так, что углы ANC и BMD прямые. Точка E — середина отрезка MN . Докажите, что прямая OE перпендикулярна основаниям трапеции.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2010

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Через точку P на стороне AC треугольника ABC проведена прямая, параллельная медиане AM , которая пересекает сторону BC в точке E , и прямая, параллельная медиане CN , которая пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что медианы AM и CN разбивают отрезок EF на три равные части.
2. В строчку выписаны 100 чисел. Каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего; сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше 2. Какое наименьшее число может стоять на 96 месте?
3. В олимпиаде участвовали 25 школьников. Им были предложены 3 задачи. Каждый участник решил хотя бы одну задачу. Среди тех, кто не решил задачу 1, было вдвое больше решивших задачу 2, чем не решивших задачу 3. Тех, кто решил только задачу 1, было на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу 1. Наконец, среди тех, кто решил только одну задачу, половина не решила задачу 1. Сколько участников решило задачу 1?
4. В вершинах куба стоят натуральные числа. Разрешается взять число в вершине и прибавить его к числу в соседней вершине. Докажите, что такими операциями можно добиться, чтобы все числа в вершинах куба давали одинаковые остатки при делении на 2010.
5. У Андреа и Бруно есть доска 11×9 (9 столбцов, 11 строк). Сначала Андреа произвольным образом разбивает эту доску на 33 полосы 1×3 . Затем Бруно вписывает в каждую клетку одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы сумма чисел в каждой полоске 1×3 была равна 5. Если сумма чисел в каждом из 9 столбцов — простое число, то Бруно выигрывает. В противном случае выигрывает Андреа. Кто из игроков может обеспечить себе победу?
6. Для каждого натурального n обозначим $D(n)$ множество всех натуральных делителей числа n . Для какого наименьшего k можно выбрать числа $x_1, x_2, \dots, x_k \leq 2010$ так, чтобы каждое число, не большее 2010, содержалось хотя бы в одном из множеств $D(x_1), D(x_2), \dots, D(x_k)$?
7. Положительные числа a, b и c и некоторые числа x, y, z удовлетворяют условиям $cy+bz = a$, $cx+az = b$ и $bz+ay = c$. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то x, y и z по модулю меньше 1.
8. На отрезке AC отмечена точка B . На отрезках AB и BC построены равносторонние треугольники ABM и BCN по одну сторону от прямой AC . На отрезке AB отмечена точка P . Прямые NP и MB пересекаются в точке Q . Докажите, что $CQ \leq NP$.

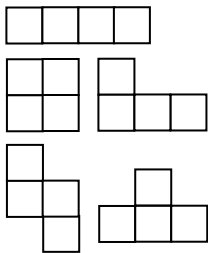
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2010

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На плоскости проведено 260 прямых. Может ли у них быть ровно 2010 точек пересечения?
2. В группе из более чем трёх школьников любые трое имеют ровно одного общего знакомого из этой группы. Сколько школьников может быть в этой группе?
3. В олимпиаде участвовали 25 школьников. Им были предложены 3 задачи. Каждый участник решил хотя бы одну задачу. Среди тех, кто не решил задачу 1, было вдвое больше решивших задачу 2, чем не решивших задачу 3. Тех, кто решил только задачу 1, было на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу 1. Наконец, среди тех, кто решил только одну задачу, половина не решила задачу 1. Сколько участников решило задачу 1?
4. В вершинах куба расставлены натуральные числа. За одну операцию Вася может прибавить к числу в любой из вершин куба число, стоящее в соседней вершине (соседнее число при этом не изменяется). Докажите, что за несколько операций Вася может сделать все числа дающими одинаковый остаток от деления на 13.
5. У Андреа и Бруно есть доска 11×9 (9 столбцов, 11 строк). Сначала Андреа произвольным образом разбивает эту доску на 33 полосы 1×3 . Затем Бруно вписывает в каждую клетку одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы сумма чисел в каждой полоске 1×3 была равна 5. Если сумма чисел в каждом из 9 столбцов — простое число, то Бруно выигрывает. В противном случае выигрывает Андреа. Кто из игроков может обеспечить себе победу?
6. В строчку выписаны 100 чисел. Каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего; сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше 2. Какое наименьшее число может стоять на 96 месте?
7. Дано число $n = 2^{300} \cdot 3^{300}$. Сколько существует делителей числа n^2 , которые меньше n , но не являются делителями n ?
8. На отрезке AC отмечена точка B . На отрезках AB и BC построены равносторонние треугольники ABM и BCN по одну сторону от прямой AC . На отрезке AB отмечена точка P . Прямые NP и MB пересекаются в точке Q . Докажите, что $CQ \leq NP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2010

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На плоскости проведено 9 прямых. Может ли у них быть ровно 17 точек пересечения?
2. В группе школьников любые двое имеют ровно одного общего знакомого из этой группы. Может ли эта группа состоять из 999 школьников?
3. В олимпиаде участвовали 25 школьников. Им были предложены 3 задачи. Каждый участник решил хотя бы одну задачу. Среди тех, кто не решил задачу 1, было вдвое больше решивших задачу 2, чем не решивших задачу 3. Тех, кто решил только задачу 1, было на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу 1. Наконец, среди тех, кто решил только одну задачу, половина не решила задачу 1. Сколько участников решило задачу 1?
4. В вершинах куба расставлены натуральные числа. За одну операцию Вася может прибавить к числу в любой из вершин куба число, стоящее в соседней вершине (соседнее число при этом не изменяется). Докажите, что за несколько операций Вася может сделать все числа дающими одинаковый остаток от деления на 3.
5. Можно ли из фигурок, изображённых справа, сложить (без пропусков и наложений) прямоугольник 12×15 клеток, используя ровно по 9 фигурок каждого из пяти видов? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.
6. На доске выписаны в ряд 2010 чисел. Первое из них равно 7, а каждое следующее равно сумме цифр квадрата предыдущего числа, увеличенной на 1. Какое число стоит на последнем месте?
7. Дано число $n = 2^{100} \cdot 3^{100}$. Сколько существует делителей числа n^2 , которые меньше n , но не являются делителями n ?
8. На отрезке AC отмечены точки B и P . На отрезках AB и BC по одну сторону от прямой AC построены равносторонние треугольники ABM и BCN . Докажите, что $MP + NP \geq AC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2010

ГРУППА «СТАРТ»

1. На столе стоят 5 гирь. Могло ли так случиться, что среди любых трех из этих пяти гирь какая-то гиря весит столько же, сколько две остальные из этих трех?
2. Среди 300 человек есть 100 Петь, 100 Колей и 100 Васей. После того, как каждому задали вопрос, как его зовут, получилось 100 ответов «Петя», 100 ответов «Коля» и 100 ответов «Вася». Известно, что ровно 80 Петей и ровно половина Колей всегда лгут, а остальные Пети и Коли всегда говорят правду. Какое наибольшее число Васей могут быть кристально честными?
3. На плоскости проведено 100 различных прямых и из точек пересечения этих прямых отмечено 300 точек. Докажите, что можно выбрать какие-то 4 отмеченные точки, никакие три из которых не лежат на одной проведенной прямой.
4. В группе школьников любые двое имеют ровно одного общего знакомого из этой группы. Может ли эта группа состоять из семи школьников?
5. Тракторист Вася купил в магазине «Все для людей» 10 бутылок кефира и рессору для своего трактора. Бизнесмен Борис Михайлович купил в этом магазине пробку для бензобака своего «Лексуса», потратив денег вдвое больше Васи. Известно, что пробка стоит втрое дороже рессоры. Во сколько раз рессора дороже бутылки кефира?
6. Можно ли из фигурок, изображённых справа, сложить (без пропусков и наложений) прямоугольник 12×15 клеток, используя ровно по 9 фигурок каждого из пяти видов? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.
7. Сумма семи натуральных чисел, не делящихся на 3, не делится на 3. Докажите, что сумма каких-то шести из них делится на 3.
8. В вершинах куба расставлены натуральные числа. За одну операцию Вася может прибавить к числу в любой из вершин куба число, стоящее в соседней вершине (соседнее число при этом не изменяется). Докажите, что за несколько операций Вася может сделать все числа дающими одинаковый остаток от деления на 3.

