МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1, 3 И 5 МЕСТА

1. Среднее по величине из трех положительных чисел a, b, c не больше среднего геометрического двух остальных. Докажите, что $abc(a^3+b^3+c^3) \geq a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с углами $\angle A = \angle B = 80°$ биссектриса угла C пересекает серединный перпендикуляр к AC в точке O. Прямая BO пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AB = CD$.

3. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC соответственно отмечены точки A_1, B_1 и C_1 таким образом, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Оказалось, что CC_1 перпендикулярно AB, $\angle APB_1 = \angle CPB_1 = 80°$ и $\angle BCP = 25°$. Докажите, что $AB_1+PC < BC$.

4. Конечное множество разбито на m подмножеств с одинаковым количеством элементов, и это же множество разбито на m^2 подмножеств с одинаковым числом элементов. Докажите, что можно выбрать m^2 различных элементов так, что каждое из множеств первого разбиения содержит ровно m выбранных элементов, а каждое из множеств второго разбиения содержит ровно один выбранный элемент.

5. По кругу выложены $n \geq 3$ монет, ровно одна из которых лежит орлом вверх. Назовем монету *хорошей*, если среди нее и двух ее соседей орлом вверх лежит нечетное число. Каждую минуту все хорошие монеты одновременно переворачивают. Для каких n наступит момент, когда все монеты лежат решкой вверх?

6. Решите в натуральных числах уравнение $7(m^5-n^5) = 41m^2n^2+1$.

7. В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, ..., для любых i и j выполнены соотношения $\min(a_i, a_j) = a_{\text{НОД}(i,j)}$, $\max(a_i, a_j) = a_{\text{НОК}(i,j)}$. Какое наибольшее количество разных чисел может встречаться среди ее первых 2010 членов?

8. Квадрат разрезан на несколько прямоугольников (более одного) со сторонами, параллельными его сторонам. Каждая прямая, параллельная сторонам квадрата и проходящая через его внутреннюю точку, проходит и через внутреннюю точку хотя бы одного из прямоугольников разбиения. Докажите, что в разбиении есть прямоугольник, не имеющий точек на границе квадрата.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

СТАРШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1, 3 И 5 МЕСТА

1. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 2(a-b)(b-c)$.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CF и медиана BM. Оказалось, что $CF = BM$. Докажите, что $\angle MBC = \angle FCA$ тогда и только тогда, когда треугольник ABC равнобедренный.

3. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC соответственно отмечены точки A_1, B_1 и C_1 таким образом, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Оказалось, что CC_1 перпендикулярно AB, $\angle APB_1 = \angle CPB_1 = 80°$ и $\angle BCP = 25°$. Докажите, что $AB_1+PC < BC$.

4. Конечное множество разбито на три подмножества с одинаковым количеством элементов, и это же множество разбито на 9 подмножеств с одинаковым числом элементов. Докажите, что можно выбрать 9 различных элементов так, что каждое из множеств первого разбиения содержит ровно три выбранных элемента, а каждое из множеств второго разбиения содержит ровно один выбранный элемент.

5. По кругу выложены 2010 монет, ровно одна из которых лежит орлом вверх. Назовем монету *хорошей*, если среди нее и двух ее соседей орлом вверх лежит нечетное число. Каждую минуту все хорошие монеты одновременно переворачивают. Наступит ли когда-нибудь момент, когда все монеты лежат решкой вверх?

6. Какие натуральные числа могут быть наибольшими общими делителями чисел $a+b$ и $\dfrac{a^{2009}+b^{2009}}{a+b}$ при взаимно простых натуральных a и b?

7. В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, ..., для любых i и j выполнены соотношения $\min(a_i,\ a_j) = a_{\text{НОД}(i,j)}$, $\max(a_i,\ a_j) = a_{\text{НОК}(i,j)}$. Какое наибольшее количество разных чисел может встречаться среди ее первых 2010 членов?

8. Все точки плоскости покрашены в два цвета. Докажите, что можно найти треугольник с вершинами одного цвета и углами 30°, 60°, 90°.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

СТАРШАЯ ГРУППА:
ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Коля выбирает из множества $\{1, 2, 3, ..., 2009\}$ такие 1005 чисел, что сумма любых двух из них не равна ни 2009, ни 2010. Сколькими способами он может это сделать?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CF и медиана BM. Оказалось, что $CF = BM$, и $\angle MBC = \angle FCA$. Найдите угол ACB.

3. Ученики двух одинаковых по численности классов разбились на четыре одинаковые по численности спортивные секции (каждый ученик посещает ровно одну секцию). Докажите, что можно выбрать двух учеников из одного класса и двух из другого, которые занимаются в четырех разных секциях.

4. Назовем положительное вещественное число *n специальным*, если его десятичная запись содержит только цифры 0 и 7. Например, число 0.77 — специальное. При каком наименьшем n единица равна сумме n специальных чисел?

5. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 3(a-b)(b-c)$.

6. По кругу выложены 2009 монет, ровно одна из которых лежит орлом вверх. Назовем монету *хорошей*, если среди нее и двух ее соседей орлом вверх лежит нечетное число. Каждую минуту все хорошие монеты одновременно переворачивают. Наступит ли когда-нибудь момент, когда все монеты лежат решкой вверх?

7. Все точки плоскости покрашены в два цвета. Докажите, что можно найти треугольник с вершинами одного цвета и углами 30°, 60°, 90°.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно отмечены точки D, E и G. Прямая DE пересекает продолжение стороны AC за точку C в точке F. Оказалось, что $\angle ACB = \angle AED = 2\angle BED$, $DF = FG$ и $DE = EC$. Докажите, что $AD = GE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, ПЕРВАЯ ЛИГА ЗА 1 МЕСТО

1. Коля выбирает из множества {1, 2, 3, ..., 2009} такие 1005 чисел, что сумма любых двух из них не равна ни 2009, ни 2010. Сколькими способами он может это сделать?

2. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 3(a-b)(b-c)$.

3. В группе из $2n+1$ человек среди любых троих есть пара друзей. Докажите, что найдутся не менее $n+1$ человек из этой группы, у каждого из которых не менее n друзей.

4. Найдите все такие натуральные числа n ($n \geq 4$), что $n-1$ делится на $[\sqrt{n}]+1$ и $n+1$ делится на $[\sqrt{n}]-1$. Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.

5. По кругу выложены 2010 монет. Назовем монету *хорошей*, если среди нее и двух ее соседей орлом вверх лежит нечетное число. Каждую минуту все хорошие монеты одновременно переворачивают. Через несколько минут все монеты оказались повернуты решкой вверх. Как могли лежать монеты изначально?

6. Нужно поставить на три клетки шахматной доски 11×11 по *хромой ладье* (которая может ходить только на соседнюю по стороне клетку) так, чтобы до любой клетки доски хотя бы одна из ладей могла дойти не более, чем за k ходов. При каком наименьшем k такое возможно?

7. По окружности расставлены 100 натуральных чисел. Разрешается проделать следующую операцию: выбрать число, вычесть из него 4, а к соседним числам прибавить по 3. Какое наибольшее количество отрицательных чисел можно получить с помощью нескольких таких операций?

8. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC соответственно отмечены точки A_1, B_1 и C_1 таким образом, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Оказалось, что CC_1 перпендикулярно AB, $\angle APB_1 = \angle CPB_1 = 80°$ и $\angle BCP = 25°$. Докажите, что $AP+PC < BC$.

XXXV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 21-27.02.2010

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3, 5, 7 МЕСТА

1. Коля выбирает из множества {1, 2, 3, ..., 2009} такие 1005 чисел, что сумма любых двух из них не равна ни 2009, ни 2010. Сколькими способами он может это сделать?

2. Найдите все такие двузначные числа $\overline{ab}$, что $\overline{a0b}$ делится на $\overline{ab}$.

3. В группе из 21 человека среди любых троих есть пара друзей. Докажите, что найдутся не менее 11 человек из этой группы, у каждого из которых не менее 10 друзей.

4. Найдите все такие натуральные числа n ($n \geq 4$), что n–1 делится на $[\sqrt{n}]+1$ и $n+1$ делится на $[\sqrt{n}]-1$. Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.

5. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 3(a-b)(b-c)$.

6. На клетчатой плоскости нарисован квадрат 10×10 клеток. Какое наибольшее количество сторон клеток можно отметить внутри или на границе этого квадрата, чтобы никакой квадрат на плоскости (в том числе и выходящий за пределы исходного) не содержал двух отмеченных сторон клеток?

7. На окружности отмечено 100 точек, в которых расставлены целые неотрицательные числа, сумма которых равна 98. Разрешается проделать следующую операцию: если в вершине стоит 0, заменить его на 2, а из одного из соседних чисел вычесть 1. Докажите, что с помощью нескольких таких операций можно получить отрицательное число.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно отмечены точки D, E и G. Прямая DE пересекает продолжение стороны AC за точку C в точке F. Оказалось, что $\angle ACB = \angle AED = 2\angle BED$, $DF = FG$ и $DE = EC$. Докажите, что $AD = GE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Коля выбирает из множества {1, 2, 3, ..., 2009} такие 1005 чисел, что сумма любых двух из них не равна ни 2009, ни 2010. Сколькими способами он может это сделать?

2. Найдите все такие двузначные числа $\overline{ab}$, что $\overline{a0b}$ делится на $\overline{ab}$.

3. Среди 100 одинаковых на вид монет есть фальшивые, которые легче настоящих. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые — тоже. Имеются весы, которые могут определить, на какой из чаш лежат монеты большего веса. Если же вес монет на чашах одинаковый, весы могут показать что угодно. Можно ли за несколько взвешиваний найти хотя бы одну фальшивую монету?

4. Докажите, что куб любого натурального числа представляется в виде разности квадратов некоторых натуральных чисел.

5. Престарелый чабан оставил трем своим сыновьям и дочери отару овец и завещание, согласно которому черных овец нужно поделить между старшим и средним сыновьями в соотношении 4:9, а белых овец поделить между старшим и младшим сыновьями в соотношении 2:5. После чего средний и младший сыновья должны часть полученных овец отдать дочери (младший должен отдать в полтора раза больше овец, чем средний) таким образом, чтобы у всех сыновей оказалось поровну овец. Сыновья сумели выполнить завещание отца и у каждого из них оказалось меньше ста овец. Сколько овец досталось дочери чабана?

6. На клетчатой плоскости нарисован квадрат 10×10 клеток. Какое наибольшее количество сторон клеток можно отметить внутри или на границе этого квадрата, чтобы никакой квадрат на плоскости (в том числе и выходящий за пределы исходного) не содержал двух отмеченных сторон клеток?

7. На окружности отмечено 100 точек, в которых расставлены целые неотрицательные числа, сумма которых равна 98. Разрешается проделать следующую операцию: если в вершине стоит 0, заменить его на 2, а из одного из соседних чисел вычесть 1. Докажите, что с помощью нескольких таких операций можно получить отрицательное число.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно отмечены точки D, E и G. Прямая DE пересекает продолжение стороны AC за точку C в точке F. Оказалось, что $\angle ACB = \angle AED = 2\angle BED$, $DF = FG$ и $DE = EC$. Докажите, что $AD = GE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 1 и 3 МЕСТА

1. В группе из $2n+1$ человек среди любых троих есть пара друзей. Докажите, что найдутся не менее $n+1$ человек из этой группы, у каждого из которых не менее n друзей.

2. Сколько существует чисел, которые можно представить в виде разности некоторого шестизначного числа и суммы его цифр?

3. Можно ли 10 различных натуральных чисел расставить по окружности таким образом, что сумма любых двух рядом стоящих чисел будет степенью двойки?

4. На клетчатой плоскости нарисован квадрат 10×10 клеток. Какое наибольшее количество сторон клеток можно отметить внутри или на границе этого квадрата, чтобы никакой квадрат не содержал двух отмеченных сторон клеток? (Эти квадраты могут вылезать за пределы исходного).

5. В ряд расставлено 100 целых неотрицательных чисел, сумма которых равна 98. Разрешается проделать следующую операцию: взять любой 0, заменить его на 2, а из одного из соседних чисел вычесть 1. Докажите, что с помощью нескольких таких операций можно получить отрицательное число.

6. На трех клетках шахматной доски 11×11 стоят хромые ладьи, которые ходят только на соседнюю по стороне клетку. До любой клетки доски хотя бы одна из ладей может дойти не более, чем за k ходов. При каком наименьшем k такое возможно?

7. Среди 100 одинаковых на вид монет есть фальшивые и настоящие. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие — тоже, фальшивая монета легче настоящей. Имеются также весы (с двумя чашками без стрелки), на каждой чашке которых умещается только по одной монете. При этом весы слегка испорчены: если монеты разного веса, перевешивает более тяжелая чашка, а если одинакового — может перевесить любая чашка. Всегда ли с помощью этих весов можно найти все фальшивые монеты?

8. Дано нечетное натуральное число x, большее 9. Вася и Петя по очереди выписывают на доску натуральные числа, меньшие 100 таким образом, чтобы все выписанные числа были попарно различны. Начинает Вася. Докажите, что он может действовать так, что после его 11 хода сумма всех написанных на доске чисел будет заканчиваться теми же двумя цифрами, что и x.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 5 и 7 МЕСТА

1. В группе из 9 человек среди любых троих есть пара друзей. Докажите, что найдутся не менее 5 человек из этой группы, у каждого из которых не менее четырех друзей.

2. Сколько существует чисел, которые можно представить в виде разности некоторого четырехзначного числа и суммы его цифр?

3. Можно ли 10 различных натуральных чисел расставить по окружности таким образом, что сумма любых двух рядом стоящих чисел будет степенью двойки?

4. В ряд выписано 2010 знаков — плюсов и минусов, причём количество плюсов чётно. Докажите, что можно заменить 1005 идущих подряд знаков на противоположные, чтобы плюсов и минусов оказалось поровну.

5. Петя и Вася по очереди выписывают на доску различные натуральные числа, меньшие 2010. Тот, после хода которого сумма всех выписанных чисел будет больше 1006005, проигрывает. Начинает Петя. Кто может выиграть, независимо от игры соперника?

6. На двух клетках шахматной доски 6×6 стоят хромые ладьи, которые ходят только на соседнюю по стороне клетку. До любой клетки доски хотя бы одна из ладей может дойти не более чем за k ходов. При каком наименьшем k такое возможно?

7. Среди 100 одинаковых на вид монет есть фальшивые. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие — тоже, фальшивая монета легче настоящей. Имеются также весы (с двумя чашками без стрелки), на каждой чашке которых умещается только по одной монете. При этом весы слегка испорчены: если монеты разного веса, перевешивает более тяжелая чашка, а если одинакового — может перевесить любая чашка. Как с помощью этих весов найти хотя бы одну фальшивую монету?

8. Малыш и Карлсон съели торт. Второй такой же торт Карлсон ел с утроенной скоростью, и хотя Малыш сбавил свою скорость в два раза, торт оказался съеден быстрее в два раза. Какую часть всей еды съел Карлсон?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 27.02.2010

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В группе из семи человек среди любых троих есть пара друзей. Докажите, что найдутся не менее четырёх человек из этой группы, у каждого из которых не менее трёх друзей.

2. Между первой и второй цифрами двузначного числа вставили ноль, и оказалось, что полученное трёхзначное число делится на исходное. Чему могло равняться исходное число?

3. В ряд выписано 2010 знаков — плюсов и минусов, причём количество плюсов чётно. Докажите, что можно заменить 1005 идущих подряд знаков на противоположные, чтобы плюсов и минусов оказалось поровну.

4. Семь предпринимателей организовали фирму, внеся на её счёт одинаковые суммы. Во время кризиса каждый месяц капитал фирмы уменьшался в два раза, если он в начале месяца выражался чётным числом рублей, в противном случае увеличивался на 3 рубля. Какая сумма была внесена на счёт вначале, если через полгода на счету оказалось 9 рублей?

5. Петя и Вася по очереди выписывают на доску различные натуральные числа, меньшие 2010. Тот, после хода которого сумма всех выписанных чисел будет больше 1006005, проигрывает. Начинает Петя. Кто может выиграть, независимо от игры соперника?

6. На двух клетках шахматной доски 6×6 стоят хромые ладьи, которые ходят только на соседнюю по стороне клетку. До любой клетки доски хотя бы одна из ладей может дойти не более чем за k ходов. При каком наименьшем k такое возможно?

7. Среди 100 одинаковых на вид монет есть фальшивые. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие — тоже, фальшивая монета легче настоящей. Имеются также весы (с двумя чашками без стрелки), на каждой чашке которых умещается только по одной монете. При этом весы слега испорчены: если монеты разного веса, перевешивает более тяжелая чашка, а если одинакового — может перевесить любая чашка. Как с помощью этих весов найти хотя бы одну фальшивую монету?

8. Малыш и Карлсон съели торт. Второй такой же торт Карлсон ел с утроенной скоростью, и хотя Малыш сбавил свою скорость в два раза, торт оказался съеден быстрее в два раза. Какую часть всей еды съел Карлсон?