МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 23.02.2010

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Из квадратов со стороной 1 и правильных треугольников со стороной 1 сложили (без наложений) выпуклый n-угольник. Какое наибольшее количество сторон может у него быть?

2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AB = 1$, $\angle BAE = \angle ABC = 120°$, $\angle CDE = 60°$ и $\angle ADB = 30°$. Докажите, что площадь пятиугольника не больше $\sqrt{3}$.

3. Целые числа a, b, c и простое p удовлетворяют условию $a^2+pb = b^2+pc = c^2+pa$. Докажите, что $a = b = c$.

4. Можно ли расставить натуральные числа в клетках таблицы 2009×2009 так, чтобы все суммы чисел в строчках и столбцах были различными точными квадратами?

5. В последовательности целых чисел $\{a_n\}$ первый член равен k, а при $n \geq 1$ член a_{n+1} равен $a_n–1$, если a_n четно, и $(a_n–1)/2$, если a_n нечетно. При каком наименьшем положительном k среди первых 2010 членов этой последовательности нет ни одного нуля?

6. В стране 100 городов, каждый из которых соединен прямой дорогой с тремя другими. Известно, что из любого города можно проехать по этим дорогам в любой другой. Докажите, что можно закрыть для проезда не более 34 городов так, чтобы по оставшимся городам не проходил никакой замкнутый маршрут ровно из пяти дорог.

7. На диагонали BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена такая точка E, что $AB = DE$, $BC = AE$ и $\angle CBD = \angle BAE$. Докажите, что $\angle ABD = 2\angle BDC$.

8. Клетки доски 60×60 раскрашены в черный и белый цвета: 1800 в черный и 1800 в белый. Разрешается разрезать доску на прямоугольники 1×3 и сложить из этих прямоугольников новую доску. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы все белые клетки были в верхней половине доски, а все черные — в нижней половине.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 23.02.2010

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Из квадратов со стороной 1 и правильных треугольников со стороной 1 сложили (без наложений) выпуклый n-угольник. Какое наибольшее количество сторон может у него быть?

2. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки D и E, а на биссектрисе угла A — точка F. Известно, что $AD = DB$, $AC = BE$, а прямые AB и DF перпендикулярны. Докажите, что $CF = EF$.

3. Целые числа a, b, c и простое p удовлетворяют условию $a^2+pb = b^2+pc = c^2+pa$. Докажите, что $a = b = c$.

4. Можно ли расставить натуральные числа в клетках таблицы 2009×2009 так, чтобы все суммы чисел в строчках и столбцах были различными точными квадратами?

5. В последовательности целых чисел $\{a_n\}$ первый член равен k, а при $n > 1$ член a_{n+1} равен $a_n–1$, если a_n четно, и $(a_n–1)/2$, если a_n нечетно. При каком наименьшем положительном k среди первых 2010 членов этой последовательности нет ни одного нуля?

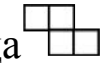
6. В некотором клубе состоит 100 джентльменов, у каждого из которых не более трёх знакомых в этом клубе. Среди любых четырёх джентльменов какие–то двое незнакомы. Докажите, что из клуба можно исключить 33 джентльмена таким образом, чтобы из любых троих оставшихся в клубе джентльменов какие–то двое не были знакомы.

7. На диагонали BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена такая точка E, что $AB = DE$, $BC = AE$ и $\angle CBD = \angle BAE$. Докажите, что $\angle ABD = 2\angle BDC$.

8. Клетки доски 60×60 раскрашены в черный и белый цвета: 1800 в черный и 1800 в белый. Разрешается разрезать доску на прямоугольники 1×3 и сложить из этих прямоугольников новую доску. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы все белые клетки были в верхней половине доски, а все черные — в нижней половине.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 23.02.2010

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечётна (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

2. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки D и E, а на биссектрисе угла A — точка F. Известно, что $AD = DB$, $AC = BE$, а прямые AB и DF перпендикулярны. Докажите, что $CF = EF$.

3. Из квадратов со стороной 1 и правильных треугольников со стороной 1 сложили (без наложений) выпуклый n-угольник. Какое наибольшее количество сторон может у него быть?

4. Можно ли расставить различные натуральные числа от 1 до 2010^2 в клетках таблицы 2010×2010 так, чтобы все суммы чисел в строчках и столбцах были различными точными квадратами?

5. В последовательности целых чисел $\{a_n\}$ первый член равен $2^{2010}+2^{2009}$, а при $n > 1$ член a_{n+1} равен a_n-1, если a_n четно, и $(a_n-1)/2$, если a_n нечетно. Найдите номер первого неположительного члена этой последовательности.

6. На диагонали BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена такая точка E, что $AB = DE$, $BC = AE$ и $\angle CBD = \angle BAE$. Докажите, что $\angle ABD = 2\angle BDC$.

7. Целые числа a, b, c и простое p удовлетворяют условию $a^2+pb = b^2+pc = c^2+pa$. Докажите, что $a = b = c$.

8. На окружности расставлено несколько точек, окрашенных в красный и синий цвета. Оказалось, что для любой пары разноцветных точек выполняется условие: из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, можно выбрать такую, на которой не менее 30 синих точек, а также можно выбрать такую, на которой не менее 20 красных точек(не включая концы дуги). Какое наименьшее количество точек могло быть на окружности?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 23.02.2010

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Даны натуральные числа a и b ($b > a \geq 2$). Докажите, что, если числа $a+k$ и $b+k$ взаимно просты при всех натуральных k от 1 до $b–a$, то $b–a = 1$.

2. На диагонали BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена такая точка E, что $AB = DE$, $BC = AE$ и $\angle CBD = \angle BAE$. Докажите, что $\angle ABD = 2\angle BDC$.

3. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида сумма чисел нечётна (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

4. Докажите неравенство $2(1+x^2+x^4) \geq 3(x^3+x)$.

5. Билеты пронумерованы шестью цифрами от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме остальных. Докажите, что общее количество счастливых билетов представляется в виде суммы 26 квадратов натуральных чисел.

6. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки D и E, а на биссектрисе угла A — точка F. Известно, что $AD = DB$, $AC = BE$, а прямые AB и DF перпендикулярны. Докажите, что $CF = EF$.

7. Можно ли все нечетные числа от 1 до 95 разбить на 12 групп по 4 числа таким образом, чтобы в каждой группе произведение каких–то двух чисел делилось на произведение двух оставшихся?

8. В некотором клубе состоит 100 джентльменов, у каждого из которых не более трёх знакомых в этом клубе. Среди любых четырёх джентльменов какие–то двое незнакомы. Докажите, что из клуба можно исключить 33 джентльмена таким образом, чтобы из любых троих оставшихся в клубе джентльменов какие–то двое не были знакомы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 23.02.2010

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Даны натуральные числа a и b ($b > a \geq 2$). Докажите, что, если числа $a+k$ и $b+k$ взаимно просты при всех натуральных k от 1 до $b–a$, то $b–a = 1$.

2. Вася и Петя играют в такую игру: на шахматную доску (8×8) Вася ставит 4 белых короля, а Петя — черную ладью. После этого они по очереди делают ходы: Вася перемещает своим ходом одного из королей на соседнюю по стороне или углу клетку, а Петя своим ходом ладью на любую клетку, лежащую в той же горизонтали или вертикали, что и ладья. Ладья не может бить короля, но может через него перепрыгивать. Верно ли, что ли Вася может действовать так, чтобы рано или поздно побить ладью одним из королей? (Король бьёт все клетки, соседние по стороне или углу с той, на которой он стоит.)

3. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида сумма чисел нечётна (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

4. В саду пана Козла растут вишни и черешни, под одной из вишен спит кот. На каждой вишне сидит по три скворца и два дрозда, а на каждой черешне два скворца и пять дроздов. В один прекрасный момент кот проснулся, запрыгнул на вишню и съел одну из птиц. А остальные птицы улетели. Через полчаса они вернулись. На каждую черешню село по семь скворцов (и ни одного дрозда), а на каждую вишню кроме той, на которой сидит кот, село по шесть дроздов (и ни одного скворца). Сколько скворцов сидело в саду пана Козла первоначально?

5. Билеты пронумерованы шестью цифрами от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме остальных. Докажите, что общее количество счастливых билетов представляется в виде суммы 28 квадратов натуральных чисел.

6. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки D и E, а на биссектрисе угла A — точка F. Известно, что $AD = DB$, $AC = BE$, а прямые AB и DF перпендикулярны. Докажите, что $CF = EF$.

7. Можно ли все нечетные числа от 1 до 95 разбить на 12 групп по 4 числа таким образом, чтобы в каждой группе произведение каких–то двух чисел делилось на произведение двух оставшихся?

8. В некотором клубе состоит 100 джентльменов, у каждого из которых не более трёх знакомых в этом клубе. Среди любых четырёх джентльменов какие–то двое незнакомы. Докажите, что из клуба можно исключить 33 джентльмена таким образом, чтобы из любых троих оставшихся в клубе джентльменов какие–то двое не были знакомы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 23.02.2010

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Можно ли числа от 1 до 100 расставить по кругу таким образом, чтобы сумма любых трех подряд стоящих чисел была простым числом?

2. Вася и Петя играют в такую игру: на шахматную доску (8×8) Вася ставит 4 белых короля, а Петя — черную ладью. После этого они по очереди делают ходы: Вася перемещает своим ходом одного из королей на соседнюю по стороне или углу клетку, а Петя своим ходом ладью на любую клетку, лежащую в той же горизонтали или вертикали, что и ладья. Ладья не может бить короля, но может через него перепрыгивать. Верно ли, что ли Вася может действовать так, чтобы рано или поздно побить ладью одним из королей? (Король бьёт все клетки, соседние по стороне или углу с той, на которой он стоит.)

3. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида сумма чисел нечётна (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

4. В саду пана Козла растет несколько черешен, под одной из которых спит пес. На каждой из черешен сидит по три скворца и еще один скворец сидит на заборе. В один прекрасный момент на нос пса села муха, пес проснулся, гавкнул и скворцы улетели. Но через минуту они вернулись. На каждую черешню село по четыре скворца, кроме той черешни под которой спал пес. Сколько скворцов сидело в саду пана Козла?

5. Несколько депутатов образовали 5 комиссий. Оказалось, что каждый из депутатов работает ровно в двух комиссиях, а для любых двух комиссий ровно один депутат работает в обеих. Сколько всего было депутатов?

6. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки D и E, а на биссектрисе угла A — точка F. Известно, что $AD = DB$, $AC = BE$, а прямые AB и DF перпендикулярны. Докажите, что $CF = EF$.

7. Можно ли все нечетные числа от 1 до 95 разбить на 12 групп по 4 числа таким образом, чтобы в каждой группе произведение каких-то двух чисел делилось на произведение двух оставшихся?

8. На окружности расставлено несколько точек, окрашенных в красный и синий цвета. Оказалось, что для любой пары разноцветных точек выполняется условие: из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, можно выбрать такую, на которой не менее 30 синих точек, а также можно выбрать такую, на которой не менее 20 красных точек (не включая концы дуги). Какое наименьшее количество точек могло быть на окружности?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 23.02.2010

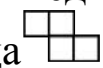
ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Можно ли числа от 1 до 100 расставить по кругу таким образом, чтобы сумма любых трех подряд стоящих чисел была простым числом?

2. В некотором клубе состоит 100 джентльменов, у каждого из которых не более троих знакомых в этом клубе, причем среди любых четверых джентльменов какие-то двое не знакомы. Докажите, что из клуба можно исключить 33 джентльмена таким образом, чтобы из любых троих оставшихся в клубе джентльменов какие-то двое не были знакомы.

3. Билеты пронумерованы шестью цифрами от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме остальных. Докажите, что общее количество счастливых билетов представляется в виде суммы 28 квадратов натуральных чисел.

4. На окружности расставлено несколько точек, окрашенных в красный и синий цвета. Оказалось, что для любой пары разноцветных точек выполняется условие: из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, можно выбрать такую, на которой не менее 30 синих точек, а также можно выбрать такую, на которой не менее 20 красных точек (не включая концы дуги). Какое наименьшее количество точек могло быть на окружности?

5. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечётна (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

6. На ужин пришли несколько супружеских пар. Каждый мужчина съел на 3 бутерброда больше, но на 4 конфеты меньше своей жены. Оказалось, что конфет и бутербродов было съедено поровну. Докажите, что количество гостей кратно четырём.

7. Можно ли все нечетные числа от 1 до 95 разбить на 12 групп по 4 числа таким образом, чтобы в каждой группе произведение каких-то двух чисел делилось на произведение двух оставшихся?

8. Найдётся ли такое натуральное число n, что у него и у числа $2n$ — одинаковые не равные 0 произведения цифр?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 23.02.2010

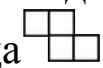
ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Можно ли числа от 1 до 100 расставить по кругу таким образом, чтобы сумма любых трех подряд стоящих чисел была простым числом?

2. В некотором клубе состоит 100 джентльменов, у каждого из которых не более троих знакомых в этом клубе, причем среди любых четверых джентльменов какие-то двое не знакомы. Докажите, что из клуба можно исключить 33 джентльмена таким образом, чтобы из любых троих оставшихся в клубе джентльменов какие-то двое не были знакомы.

3. Билеты пронумерованы шестью цифрами от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме остальных. Докажите, что количество счастливых билетов, номера которых имеют сумму цифр, равную 30, является квадратом натурального числа.

4. На окружности расставлено несколько точек, окрашенных в красный и синий цвета. Оказалось, что для любой пары разноцветных точек выполняется условие: из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, можно выбрать такую, на которой не менее 30 синих точек, а также можно выбрать такую, на которой не менее 20 красных точек (не включая концы дуги). Какое наименьшее количество точек могло быть на окружности?

5. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечётна (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

6. На ужин пришли несколько супружеских пар. Каждый мужчина съел на 3 бутерброда больше, но на 4 конфеты меньше своей жены. Оказалось, что конфет и бутербродов было съедено поровну. Докажите, что количество гостей кратно четырём.

7. В клетках таблицы 2×4 записаны различные натуральные числа, не превышающие n, так, что среди любых соседних (имеющих общую сторону) чисел одно делится на другое. При каком наименьшем n это возможно? Соседними считаются числа, которые записаны в клетках с общей стороной.

8. Найдётся ли такое девятизначное натуральное число n, что у него и у числа $2n$ — одинаковые не равные 0 произведения цифр?

Ягубов.РФ