XXXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ИЖЕВСК, 2-8.11.2009

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДРАКА 2.11.2009

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. Маша заменила в примере на умножение двузначных чисел цифры буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. У неё получилось $\overline{АБ} \times \overline{ВГ} = \overline{БББ}$ Каким мог быть исходный пример? Найдите все возможные варианты.

2. Оля задумала четыре целых числа, а затем нашла все их попарные суммы. Пять из них оказались равны 70, 110, 120, 180 и 230. Чему равна шестая сумма?

3. Сколько чисел от 1 до 1000 можно представить в виде суммы натурального числа, кратного 7 и натурального числа, кратного 4?

4. Все четырехзначные числа, цифры которых различны и стоят в порядке возрастания, выписали друг за другом — снова в порядке возрастания. Какое число стоит на 16-м месте?

5. На карточке у каждого из 11 школьников написано какое-то натуральное число. Известно, что все эти числа различны, а их сумма равна 71. Чему может быть равно среднее по величине из написанных чисел?

6. От города до горного приюта целое число километров. Однажды утром три группы альпинистов отправились из города в приют. В первый день группа A прошла шестую часть пути, группа B — половину пути, а группа C — четверть пути. На следующий день группа A прошла 100 км, группа B — 10 км, а группа C — 78 км. За два дня группа B прошла большее расстояние, чем группа A, но меньшее, чем группа C. Каково расстояние от города до приюта?

7. За круглым столом стоят 2009 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Несколько человек ответили, что один, а все остальные — что два. Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

8. Сколько существует пятизначных чисел, десятичная запись которых начинается с 1 и содержит ровно две одинаковые цифры?

9. Найдите 2009-й член последовательности 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, ...

10. Найдите наименьшее натуральное n такое, что все 73 дроби $19/(n+21)$, $20/(n+22)$, $21/(n+23)$, ..., $91/(n+93)$ несократимы.

11. Сколько существует трехзначных чисел, у которых сумма цифр больше произведения цифр?

12. На плоскости провели 6 прямых и отметили несколько точек так, ч о на каждой прямой оказалось ровно по три отмеченных точки. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

13. В каждой клетке квадрата 3×3 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате не оказалось трех монет, расположенных в одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали и лежащих одинаково (то есть все три орлом вверх или все три решкой вверх)?

14. Города Верходырье, Среднедырье и Нижнедырье соединены дорогами. Между каждыми двумя городами есть не менее трех, но не более десяти прямых (то есть не проходящих через третий город) дорог. Географическое общество подсчитало, что добраться из Верходырья в Нижнедырье (напрямик или через Среднедырье) можно 33 способами. А путей из Среднедырья в Верходырье (прямых или через Нижнедырье) всего 23. Сколькими способами можно проехать из Нижнедырья в Среднедырье (возможно, посетив по дороге Верходырье)?

15. Граничные клетки прямоугольника 3×5 закрыты шестью разными костями домино, приложенными друг к другу по правилам. Какое наименьшее количество точек может быть на всех шести костях вместе? (Напомним, что кость домино состоит из двух клеток, в каждой из которых от 0 до 6 точек; если у клеток двух разных костей есть общая сторона, в этих клетках должно быть поровну точек.)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Оля задумала четыре целых числа, а затем нашла все их попарные суммы. Пять из них оказались равны 70, 110, 120, 180 и 230. Чему равна шестая сумма?

2. Сколько чисел от 1 до 1000 можно представить в виде суммы натурального числа, кратного 7 и натурального числа, кратного 4?

3. Все четырехзначные числа, цифры которых различны и стоят в порядке возрастания, выписали — снова в порядке возрастания. Какое число стоит на 97-м месте?

4. Сколькими способами можно расставить числа 1 и -1 во всех клетках таблицы 4×4 так, чтобы сумма всех чисел в каждой строке и в каждом столбце была равна 0?

5. Города Верходырье, Среднедырье и Нижнедырье соединены дорогами. Между каждыми двумя городами есть не менее трех, но не более десяти прямых (то есть не проходящих через третий город) дорог. Географическое общество подсчитало, что добраться из Верходырья в Нижнедырье (напрямик или через Среднедырье) можно 33 способами. А путей из Среднедырья в Верходырье (прямых или через Нижнедырье) всего 23. Сколькими способами можно проехать из Нижнедырья в Среднедырье (возможно, посетив по дороге Верходырье)?

6. На карточке у каждого из 2009 школьников написано какое-то натуральное число. Известно, что все эти числа различны, а их сумма равна 2020049. Чему может быть равно среднее по величине из написанных чисел?

7. Пусть A — двузначное число, не кратное 10. B — трехзначное число. Известно, что A% от B равны 400. Найдите, чему могут быть равны A и B.

8. Треугольная числовая таблица построена таким образом: в вершине, составляющей нулевую строчку, стоит число 0, в n-й строчке на левом и правом концах стоит по числу n, и между каждыми двумя соседними числами n-ой строчки в n+1-ой стоит их сумма. Найдите сумму всех чисел в сотой строчке.

9. От города до горного приюта целое число километров. Однажды утром три группы альпинистов отправились из города в приют. В первый день группа А прошла шестую часть пути, группа В — половину пути, а группа С — четверть пути. На следующий день группа А прошла 100 км, группа В — 10 км, а группа С — 78 км. За два дня группа В прошла большее расстояние, чем группа А, но меньшее, чем группа С. Каково расстояние от города до приюта?

10. Сумма двух четырехзначных чисел $\overline{abab}$ и $\overline{cdcd}$ — квадрат целого числа. Каково наибольшее возможное значение произведения $abcd$?

11. За круглым столом стоят 2009 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Несколько человек ответили, что один, а все остальные — что два. Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

12. Сколько существует пятизначных чисел, десятичная запись которых начинается с 1 и содержит ровно две одинаковые цифры?

13. Найдите 2009-й член последовательности 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, ...

14. Грузчики Коля и Петя носят ящики. Переноска маленького ящика занимает у Пети 1 минуту, а у Коли 3 минуты. Зато большой ящик Коля переносит за 5 минут, а Петя — за 6. Всего им нужно перенести 10 больших и 10 маленьких ящиков. За какое наименьшее время они могут это сделать?

15. Найдите наименьшее натуральное n такое, что все 73 дроби $19/(n+21)$, $20/(n+22)$, $21/(n+23)$, ..., $91/(n+93)$ несократимы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Точки M, N, O — середины сторон AB, CD, EF правильного шестиугольника $ABCDEF$. Площадь шестиугольника равна 8. Найдите площадь треугольника MNO.

2. Сколькими способами можно расставить числа 1 и -1 во всех клетках таблицы 4×4 так, чтобы сумма всех чисел в каждой строке и в каждом столбце была равна 0?

3. Девять натуральных чисел выписали в строчку таким образом, что каждое следующее число больше предыдущего на одну и ту же величину. Сумма всех чисел больше 200, но меньше 220. Второе число равно 12. Чему может быть равно последнее число?

4. Города Верходырье, Среднедырье и Нижнедырье соединены дорогами. Между каждыми двумя городами есть не менее трех, но не более десяти прямых (то есть не проходящих через третий город) дорог. Географическое общество подсчитало, что добраться из Верходырья в Нижнедырье (напрямик или через Среднедырье) можно 33 способами. А путей из Среднедырья в Верходырье (прямых или через Нижнедырье) всего 23. Сколькими способами можно проехать из Нижнедырья в Среднедырье (возможно, посетив по дороге Верходырье)?

5. Пусть A — двузначное число, не кратное 10. B — трехзначное число. Известно, что A% от B равны 400. Найдите, чему могут быть равны A и B.

6. Треугольная числовая таблица построена таким образом: в вершине, составляющей нулевую строчку, стоит число 0, в n-й строчке на левом и правом концах стоит по числу n, и между каждыми двумя соседними числами n-ой строчки в n+1-ой стоит их сумма. Найдите сумму всех чисел в сотой строчке.

7. Грузчики Коля и Петя носят ящики. Переноска маленького ящика занимает у Пети 1 минуту, а у Коли 3 минуты. Зато большой ящик Коля переносит за 5 минут, а Петя — за 6. Всего им нужно перенести 10 больших и 10 маленьких ящиков. Как они должны распределить между собой работу, чтобы выполнить ее за кратчайшее время?

8. Сумма двух четырехзначных чисел $\overline{abab}$ и $\overline{cdcd}$ — квадрат целого числа. Каково наибольшее возможное значение произведения $abcd$?

9. Числа 312837 и 310650 дают один и тот же двузначный остаток при делении на некоторое трехзначное число. Найдите этот остаток.

10. За круглым столом стоят 2009 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Несколько человек ответили, что один, а все остальные — что два. Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

11. Найдите 2009-й член последовательности 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, ...

12. Найдите наименьшее натуральное a, для которого строго между a и $2a$ лежит ровно 101 точный квадрат.

13. На доске написаны два двузначных числа. Коля перемножил эти два числа и получил четырехзначное число, начинающееся с двойки. Простой деревенский паренек по имени Педро сложил эти же два числа. Если вычеркнуть из результата Коли первую цифру, получится результат Педро. Какие числа могли быть написаны на доске?

14. Прямая, проходящая через вершину A и точку E на стороне BC прямоугольника $ABCD$, делит прямоугольник на две части: треугольник ABE и трапецию $AECD$. Известно, что $S_{ABE}/S_{AECD} = 1/6$. Найдите BE/EC.

15. Все цифры трехзначного числа N различны. Из этих цифр составляют всевозможные двузначные числа с неравными цифрами. Найдите все N, для которых сумма всех составленных двузначных чисел равна $2N$.

ОТВЕТЫ 6 КЛАСС. **1.** 37×21 = 777 или 15×37 = 555. **2.** 190. **3.** 981. **4.** 1267. **5.** 6. **6.** 271 км. **7.** 1006. **8.** 5040. **9.** 29. **10.** 95. **11.** 199. **12.** 7. **13.** 4 **14.** 21. **15.** 10.

ОТВЕТЫ 7 КЛАСС. **1.** 190. **2.** 981. **3.** 3468. **4.** 90. **5.** 21. **6.** 1005. **7.** $A = 64$, $B = 625$. **8.** $2^{101}–2$. **9.** 271 км. **10.** 600. **11.** 1006. **12.** 5040. **13.** 29. **14.** 33 минуты. **15.** 95.

ОТВЕТЫ 8 КЛАСС. **1.** 3. **2.** 90. **3.** 40. **4.** 21. **5.** $A = 64$, $B = 625$. **6.** $2^{101}–2$. **7.** 33 минуты **8.** 600. **9.** 96. **10.** 1006. **11.** 29. **12.** 58483. **13.** (24; 88), (30; 70). **14.** 2/5. **15.** 198.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 3.11.2009

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. Найдите все трёхзначные числа, у которых сумма первой и второй цифр в 10 раз больше суммы второй и третьей цифр.

2. Встретились как-то правдивый человек, который всегда говорит правду, лжец, который всегда лжёт, и политик, который говорит то, что ему выгодно в данный момент. Каждому из них задали вопрос, кто он. Первый сказал, что он правдивый человек, второй — что он лжец, а третий — что он не политик. Кто есть кто на самом деле?

3. При каком наименьшем k полоску клетчатой бумаги шириной 2 и длиной k клеточек можно без остатка разрезать на 7 клетчатых прямоугольников, среди которых нет одинаковых?

4. Бассейн наполняется четырьмя трубами. Если одновременно включить первую, вторую и третью, он наполнится за 10 часов, если вторую, третью и четвёртую — за 8 часов, если вторую и третью — за 15 часов. За какое время наполнится бассейн, если одновременно включить все четыре трубы?

5. Клетчатый квадрат 9×9 разбит на прямоугольники 1×3. У каждого из прямоугольников отмечена точка пересечения диагоналей. Докажите, что из отмеченных точек можно выбрать такие четыре, которые лежат на одной прямой.

6. В стране Гамильтонии 13 городов. Каждая из трех гамильтонских авиакомпаний осуществляет 13 прямых рейсов между городами страны, образующих вместе замкнутый маршрут, проходящий по всем городам. Известно, что между каждыми двумя городами может быть рейс не более, чем одной авиакомпании. Докажите, что из любого города в любой другой можно добраться, сделав не более одной пересадки.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Встретились как-то правдивый человек, который всегда говорит правду, лжец, который всегда лжёт, и политик, который говорит то, что ему выгодно в данный момент. Каждому из них задали вопрос, кто он. Первый сказал, что он правдивый человек, второй — что он лжец, а третий — что он политик. Кто есть кто на самом деле?

2. При каком наименьшем k полоску клетчатой бумаги шириной 2 и длиной k клеточек можно без остатка разрезать на 7 клетчатых прямоугольников, среди которых нет одинаковых?

3. Клетчатый квадрат 9×9 разбит на прямоугольники 1×3. У каждого из прямоугольников отмечена точка пересечения диагоналей. Докажите, что из отмеченных точек можно выбрать такие четыре, которые лежат на одной прямой.

4. Найдите все натуральные числа $100 < m < 200$, для которых существует натуральное n такое, что mn — квадрат целого числа, а $m–n$ — простое число.

5. В стране Гамильтонии 13 городов. Каждая из трех гамильтонских авиакомпаний осуществляет 13 прямых рейсов между городами страны, образующих вместе замкнутый маршрут, проходящий по всем городам. Известно, что между каждыми двумя городами может быть рейс не более, чем одной авиакомпании. Докажите, что из любого города в любой другой можно добраться, сделав не более одной пересадки.

6. Пусть $k = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Выразите $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ через k.

7. Организаторы лотереи выпустили миллион билетов со всеми шестизначными номерами от 000000 до 999999. Группа друзей выкупила все билеты, которые они считали счастливыми — а именно, билеты с такими номерами $\overline{abcdef}$, что $a{\cdot}f+b{\cdot}e+c{\cdot}d = 100$. Докажите, что сумма номеров остальных билетов делится на 13.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Встретились как-то правдивый человек, который всегда говорит правду, лжец, который всегда лжёт, и политик, который говорит то, что ему выгодно в данный момент. Каждому из них задали вопрос, кто он. Первый сказал, что он правдивый человек, второй — что он лжец, а третий — что он не политик. Кто есть кто на самом деле?

2. Клетчатый квадрат 9×9 разбит на прямоугольники 1×3. У каждого из прямоугольников отмечена точка пересечения диагоналей. Докажите, что из отмеченных точек можно выбрать такие четыре, которые лежат на одной прямой.

3. Найдите все натуральные числа $100 < m < 200$, для которых существует натуральное n такое, что mn — квадрат целого числа, а $m–n$ — простое число.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. AL — его биссектриса. M и N — середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $ML+NL > AL$.

5. Пусть $k = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Выразите $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ через k.

6. Организаторы лотереи выпустили миллион билетов со всеми шестизначными номерами от 000000 до 999999. Группа друзей выкупила все билеты, которые они считали счастливыми — а именно, билеты с такими номерами $\overline{abcdef}$, что $a{\cdot}f+b{\cdot}e+c{\cdot}d = 100$. Докажите, что сумма номеров остальных билетов делится на 13.

7. Последовательность натуральных чисел (a_n) задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 3a_{n-1}-a_{n-2}$ при всех $n > 2$. Докажите, что среди простых делителей членов последовательности есть число, большее 2009.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 3.11.2009

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. На клетчатой бумаге отмечены 9 клеточек, образующие квадрат. Покажите, как провести два прямолинейных разреза, чтобы каждая из отмеченных клеток оказалась разрезанной.

2. Произведение двузначного числа на трёхзначное — четырёхзначное число, записанное четырьмя одинаковыми цифрами. Какое наибольшее количество различных цифр может потребоваться для записи обоих сомножителей и произведения?

3. Каждый житель острова Невезения — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, причём лжецов на острове ровно 33. Однажды каждый житель острова заявил: «Среди всех жителей острова, не считая меня, не меньше трети лжецов». Сколько жителей может быть на острове? Перечислите все возможности и докажите, что других возможностей нет.

4. Двое путников стартуют с одного конца дорожки с разными скоростями в одном направлении. Каждый из них, дойдя до одного из концов дорожки, разворачивается и идет с прежней скоростью в противоположном направлении. Может ли случиться, что каждая встреча путников происходит внутри (не в концах) дорожки, и при этом они встречаются лицом к лицу?

5. У Кости есть фонарик и 13 аккумуляторов. Косте известно, что 7 аккумуляторов заряжены (но неизвестно, какие именно), а остальные разряжены. Костя может вставить в фонарик два аккумулятора, и если оба заряжены, то лампочка загорится, а иначе — нет. Как ему за 7 таких проверок найти два заряженных аккумулятора?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Произведение двузначного числа на трёхзначное — четырёхзначное число, записанное четырьмя одинаковыми цифрами. Какое наибольшее количество различных цифр может потребоваться для записи обоих сомножителей и произведения?

2. Каждый житель острова Невезения — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, причём лжецов на острове ровно 33. Однажды каждый житель острова заявил: «Среди всех жителей острова, не считая меня, не меньше трети лжецов». Сколько жителей может быть на острове? Перечислите все возможности и докажите, что других возможностей нет. (

3. Двое путников стартуют с одного конца дорожки с разными скоростями в одном направлении. Каждый из них, дойдя до одного из концов дорожки, разворачивается и идет с прежней скоростью в противоположном направлении. Может ли случиться, что каждая встреча путников происходит внутри (не в концах) дорожки, и при этом они встречаются лицом к лицу?

4. Положительные числа x и y, меньшие 1, таковы, что $4x^2y^2 =(1-x)(1-y)$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $(1-x)y$, $(1-y)x$ не меньше 1/4.

5. У Кости есть фонарик и 20 аккумуляторов. Косте известно, что 10 аккумуляторов заряжены (но неизвестно, какие именно), а остальные разряжены. Костя может вставить в фонарик два аккумулятора, и если оба заряжены, то лампочка загорится, а иначе — нет. Как ему за 12 таких проверок найти два заряженных аккумулятора?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Произведение двузначного числа на трёхзначное — четырёхзначное число, записанное четырьмя одинаковыми цифрами. Какое наибольшее количество различных цифр может потребоваться для записи обоих сомножителей и произведения?

2. Двое путников стартуют с одного конца дорожки с разными скоростями в одном направлении. Каждый из них, дойдя до одного из концов дорожки, разворачивается и идет с прежней скоростью в противоположном направлении. Может ли случиться, что каждая встреча путников происходит внутри (не в концах) дорожки, и при этом они встречаются лицом к лицу?

3. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. M — точка на катете AC такая, что $AM = 2CM$. Докажите, что $\angle MKC = \angle ABM$.

4. Положительные числа x, y и z, меньшие 1, таковы, что $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ не меньше 1/4.

5. У Кости есть фонарик и 13 аккумуляторов. Косте известно, что 7 аккумуляторов заряжены (но неизвестно, какие именно), а остальные разряжены. Костя может вставить в фонарик два аккумулятора, и если оба заряжены, то лампочка загорится, а иначе — нет. За какое наименьшее число таких проверок можно добиться, чтобы лампочка наверняка хотя бы раз загорелась?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 4.11.2009

СТАРШАЯ ГРУППА

1. Решите в натуральных числах уравнение $(n+1)^k-1 = n!$.

2. Все цифры 1000-значного числа отличны от 0. Их произвольным образом разбили на пары, цифры в каждой паре перемножили и полученные 500 произведений сложили. Может ли результат оказаться делителем исходного числа?

3. Клетки прямоугольника 99×101 раскрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется клетка, для которой в содержащих ее строке и столбце найдется еще хотя бы 99 клеток того же цвета.

4. Вася, Петя и еще 2009 человек встали в круг, при этом Вася и Петя находятся не рядом. После этого Вася выбирает любого из двух своих соседей и «пятнает» его (хлопает по плечу). Потом это делает Петя, потом снова Вася и т.д. Тот, кого запятнали, выходит из круга (и круг сужается). Тот из двух игроков, который запятнает другого, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

5. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab > 2009a+2010b$. Докажите, что $a+b > \left(\sqrt{2009}+\sqrt{2010}\right)^2$.

6. Прямая m пересекает стороны AB и AC треугольника ABC и прямую BC в точках L, M и N соответственно, причем $2AL < AB$. Точки F, K и T — середины отрезков AM, AB и MN соответственно, причем прямые LF и BC параллельны. Докажите, что четырехугольник $TCKL$ — параллелограмм.

7. За круглым столом сидят 2009 человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями. Известно, что среди любых трех из них есть двое незнакомых. Докажите, что за столом можно найти человека, у которого не более 803 знакомых. (Болгария, 2004)

8. В треугольнике ABC все углы больше 45°. На стороне AB выбрали точку K. Точки X и Y симметричны K относительно сторон BC и AC соответственно. Докажите, что $XY > AB$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 4.11.2009

МЛАДШАЯ ГРУППА

1. Дано 10 гирь. Оказалось, что суммарный вес любых четырех гирь больше, чем суммарный вес любых трех из оставшихся. Верно ли, что суммарный вес любых трех гирь больше, чем суммарный вес любых двух из оставшихся?

2. Все цифры 80-значного числа отличны от 0. Их произвольным образом разбили на пары, цифры в каждой паре перемножили и полученные 40 произведений сложили. Может ли результат оказаться делителем исходного числа?

3. Клетки прямоугольника 9×11 раскрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется клетка, для которой в содержащих ее строке и столбце найдется еще хотя бы 9 клеток того же цвета.

4. Вася, Петя и еще 2009 человек встали в круг, при этом Вася и Петя находятся не рядом. После этого Вася выбирает любого из двух своих соседей и «пятнает» его (хлопает по плечу). Потом это делает Петя, потом снова Вася и т.д. Тот, кого запятнали, выходит из круга (и круг сужается). Тот из двух игроков, который запятнает другого, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

5. Натуральные числа a и b удовлетворяют условию $ab > 2009a+2010b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a и b больше 4019.

6. Акции компании "ЖЖЖ" растут в цене на 10 процентов каждый день. Бизнесмен Вася ежедневно три дня подряд закупал акции компании на 100 долларов, а на четвертый их все продал. Сколько денег он заработал на этой операции?

7. В стране 200 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что самый короткий замкнутый циклический маршрут содержит 140 городов. Докажите, что есть как минимум 140 городов, из которых выходит не более двух дорог.

8. В треугольнике ABC все углы больше 45°. На стороне AB выбрали точку K. Точки X и Y симметричны K относительно сторон BC и AC соответственно. Докажите, что $XY > AB$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 4.11.2009

ГРУППА «СТАРТ»

1. Найдите 50-значное число без нулей в десятичной записи, которое делится на сумму квадратов своих цифр.

2. За круглым столом сидят 15 гостей так, что любой из них сидит рядом со своими знакомыми. Оказалось, что каждый из гостей знаком ровно с шестерыми из остальных, при этом среди любых троих есть двое незнакомых. Может ли такое быть?

3. Клетки прямоугольника 9×11 раскрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется клетка, для которой в содержащих ее строке и столбце найдется еще хотя бы 9 клеток того же цвета.

4. Акции компании "ЖЖЖ" растут в цене на 10 процентов каждый день. Бизнесмен Вася ежедневно три дня подряд закупал акции компании на 100 долларов, а на четвертый их все продал. Сколько денег он заработал на этой операции?

5. Дано 10 гирь. Оказалось, что суммарный вес любых четырех гирь больше, чем суммарный вес любых трех из оставшихся. Верно ли, что суммарный вес любых трех гирь больше, чем суммарный вес любых двух из оставшихся?

6. Четыре футбольных команды сыграли однокруговой турнир. Команда «Одноногие овечки» выиграла турнир, не проиграв ни одной игры. Команда «Рахиты» заняла второе место, не сыграв ни одного матча вничью. Команда «Непобедимые дьяволы» заняла третье место, не выиграв ни разу. Наконец, команда «Мировые звезды» заняла четвертое место. В случае, когда команды набирали поровну очков, более высокое место занимала команда, выигравшая личную встречу. Если личная встреча завершалась вничью, то объявлялась дележка мест. Сколько очков могли набрать команды? (В футболе за победу дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0.)

7. На плоскости проведено 6 прямых и отмечено несколько точек. Оказалось, что на каждой прямой отмечено ровно по 3 точки. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

8. Вася, Петя и еще 2009 человек встали в круг, при этом Вася и Петя находятся не рядом. После этого Вася выбирает любого из двух своих соседей и «пятнает» его (хлопает по плечу). Потом это делает Петя, потом снова Вася и т.д. Тот, кого запятнали, выходит из круга (и круг сужается). Тот из двух игроков, который запятнает другого, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

XXXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ИЖЕВСК, 2-8.11.2009

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 5.11.2009

СТАРШАЯ ГРУППА

1. $2N$ карточек, каждая из которых окрашена с одной стороны в красный цвет и с другой — в зеленый, пронумерованы числами от 1 до N так, что каждый номер присвоен ровно двум карточкам. Карточки разложены на несколько групп, в каждой из которых не менее трех карточек. Разрешается одновременно перевернуть две карточки с одинаковыми номерами. Докажите, что при любом начальном положении карточек можно добиться того, чтобы в каждой группе присутствовали карточки, лежащие вверх и зеленой, и красной стороной.

2. Пусть $A = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1997\cdot 1998}$ и $B = \frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\ldots+\frac{1}{1998\cdot 1000}$. Докажите, что A/B — целое число.

3. Когда в остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и BE, оказалось, что $S_{BDE} \le S_{DEA} \le S_{EAB} \le S_{ABD}$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

4. По окружности расставлены 10000 точек, занумерованных в порядке обхода по часовой стрелке числами от 1 до 10000. Эти точки разбили на 5000 пар и точки в каждой паре соединили хордой. Оказалось, что каждая хорда пересекает нечётное число других хорд. Для каждой хорды перемножили номера точек, которые она соединяет. Докажите, что сумма полученных произведений делится на 4.

5. Верхний край прямоугольного листа бумаги — отрезок AD. Прямая l, проходящая через A и точку на нижнем краю, образует с AD угол α. На вертикальном краю листа, проходящем через A, отметили точки B и C так, что $AB = BC$. Потом лист перегнули по некоторой прямой так, что точка C совпала с точкой C', лежащей на прямой l, а точка A — с точкой A' листа, лежащей на горизонтальной прямой, проходящей через B. При этом точка B совпала с точкой B'. Докажите, что прямые AA' и AB' разбивают угол α на три равные части.

6. Язык, на котором говорят в стране Нормативии, использует семь букв: *a, b, c, d, e, f, g*. Министерство образования издало распоряжение, согласно которому некоторые слова можно заменять другими. Именно, букву *a* в любом месте слова можно заменить на сочетание *bc*, *b* — на *cd*, *c* — на *de*, *d* — на *ef*, *e* — на *fg*, *f* — на *ga* и *g* — на *ab*. Кроме того, если с двух сторон от буквы стоят одинаковые буквы, эти две буквы можно вычеркнуть. Докажите, что по новым правилам любое слово можно заменить любым другим.

7. О натуральных числах a и n известно, что a^2+1 делится на n. Докажите, что найдется натуральное число b, для которого b^2+1 делится на $n(n^2+1)$.

8. Некоторые города Графинии соединены дорогами. Из каждого города выходит не более n дорог, но среди каждых m городов есть два, соединенные дорогой, не проходящей через другие города. Какое наибольшее количество городов может быть в Графинии?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 5.11.2009

МЛАДШАЯ ГРУППА

1. 12 последовательных натуральных чисел разбиты на 3 группы. Может ли оказаться так, что суммы квадратов чисел во всех группах одинаковы?

2. Для каких натуральных n можно найти такие натуральные числа a и b, что сумма цифр каждого из чисел a, b и $a+b$ равна n?

3. На столе лежит куча из 999 монет. Вася и Петя по очереди берут монеты из кучи. Начинает Вася. За один ход можно брать одну или две монеты. Игра заканчивается, когда все монеты из кучи взяты. Выигрывает тот, у кого на руках по окончании игры окажется четное число монет. Кто выиграет при правильной игре?

4. По окружности расставлены 10000 точек, занумерованных в порядке обхода по часовой стрелке числами от 1 до 10000. Эти точки разбили на 5000 пар и точки в каждой паре соединили хордой. Оказалось, что каждая хорда пересекает ровно одну другую хорду. Для каждой хорды перемножили номера точек, которые она соединяет. Докажите, что сумма полученных произведений делится на 4.

5. Верхний край прямоугольного листа бумаги — отрезок AD. Прямая l, проходящая через A и точку на нижнем краю, образует с AD угол α. На вертикальном краю листа, проходящем через A, отметили точки B и C так, что $AB = BC$. Потом лист перегнули по некоторой прямой так, что точка C совпала с точкой C', лежащей на прямой l, а точка A — с точкой A' листа, лежащей на горизонтальной прямой, проходящей через B. При этом точка B совпала с точкой B'. Докажите, что прямые AA' и AB' разбивают угол α на три равные части.

6. Язык, на котором говорят в стране Нормативии, использует семь букв: *a, b, c, d, e, f, g*. Министерство образования издало распоряжение, согласно которому некоторые слова можно заменять другими. Именно, букву *a* в любом месте слова можно заменить на сочетание *bc, b* — на *cd, c* — на *de, d* — на *ef, e* — на *fg, f* — на *ga и g* — на *ab.* Кроме того, если с двух сторон от буквы стоят одинаковые буквы, эти две буквы можно вычеркнуть. Докажите, что по новым правилам любое слово можно заменить любым другим.

7. Можно ли на плоскости отметить 100 точек таким образом, что для любых двух отмеченных точек найдётся еще одна отмеченная точка, равноудаленная от них?

8. В стране из каждого города выходит не более 10 дорог, и среди любых 20 городов обязательно найдутся два, соединенные дорогой. Какое наибольшее количество городов может быть в этой стране?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 5.11.2009

ГРУППА «СТАРТ»

1. Числа от 1 до 30 разбиты на две группы по 15 чисел. Может ли оказаться так, что суммы квадратов чисел в двух группах одинаковы?

2. Квадратная таблица 3×3 заполнена попарно различными цифрами таким образом, что все трехзначные числа, которые можно прочитать в строках этой таблицы слева направо и в столбцах сверху вниз, делятся на 6. Сколько из этих шести чисел могут делиться на 5?

3. 16 теннисистов сыграли турнир. Теннисист, проигравший три матча, выбывает из дальнейшей борьбы. Турнир продолжается до тех пор, пока не останется один теннисист. Никакие двое теннисистов не могли сыграть более одного раза. Могло ли в этом турнире быть сыграно ровно 44 матча?

4. В комнате находится 100 школьников, один из которых — Вася. Оказалось, что все присутствующие в комнате имеют поровну знакомых, причем если двое незнакомы, то ровно один из них знаком с Васей. Сколько знакомых может быть у Васи в этой комнате? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет).

5. На доске написано число 1. За одну операцию к написанному числу можно либо прибавить 111, либо поменять местами две его соседние ненулевые цифры. Можно ли за несколько таких операций получить число 2009?

6. На столе лежит куча из 2009 монет. Вася и Петя по очереди берут монеты из кучи. Начинает Вася. За один ход можно брать одну или две монеты. Игра заканчивается, когда все монеты из кучи взяты. Выигрывает тот, у кого на руках по окончании игры окажется четное число монет. Кто выиграет при правильной игре?

7. Язык, на котором говорят в стране Нормативии, использует четыре буквы: *a, b, c, d*. Министерство образования издало распоряжение, согласно которому некоторые слова можно заменять другими. Именно, букву *a* в любом месте слова можно заменить на сочетание *bc, b* — на *cd, c* — на *da, d* — на *ab.* Кроме того, если с двух сторон от буквы стоят одинаковые буквы, эти две буквы можно вычеркнуть. Докажите, что по новым правилам из слова *a* можно получить слово *b*.

8. Можно ли на плоскости отметить 6 точек таким образом, что для любых двух отмеченных точек найдётся еще одна отмеченная точка, равноудалённая от них?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 7.11.2009

СТАРШАЯ ГРУППА

1. Назовем *изящным* разбиение натурального числа на слагаемые, каждое из которых является степенью двойки и используется не более двух раз. У каких натуральных чисел количество изящных разбиений четно? (Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одно).

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под углом α. Оказалось, что у любого угла величины α с вершиной в точке O часть, лежащая внутри четырехугольника, имеет одну и ту же площадь. Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

3. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+x^2}\ge x+y+z\,.$$

4. Кресла 23 судей Малого Синедриона расположены в ряд. Во время заседания судьи могут входить и выходить по одному или парами (если двое судей входят вместе, то они вместе и уходят). Известно, что на заседании никогда одновременно не присутствует более 16 судей. Докажите, что судебный пристав может так рассаживать входящих судей, чтобы судьи, пришедшие вместе, сидели рядом.

5. Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d, что $d^2 \le n < 100d^2$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол D равен 50°. На сторонах AB, CD и AD отмечены точки E, F и G соответственно так, что $\angle AEF = \angle CFG = 90°$ и $AE = BE$. Докажите, что $AF+FG > BD$.

7. На плоскости проведено несколько красных, синих и зеленых прямых (прямые всех трёх цветов есть). Известно, что каждая красная прямая пересекает менее двух третей всех синих прямых, а каждая синяя прямая пересекает менее двух третей всех зеленых прямых. Докажите, что есть зелёная прямая, которая пересекает не более половины всех красных прямых.

8. В клетках квадрата $2n\times 2n$ нужно записать числа 1, 2, ..., $2n^2$ (каждое по два раза) так, чтобы любые два одинаковых числа были написаны в противоположных угловых клетках квадрата 4×4. При каких n это возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 7.11.2009

МЛАДШАЯ ГРУППА

1. В парламенте присутствуют депутаты от партий "Единение" и "Справедливость". При голосовании ровно 55 процентов членов "Единения" и ровно 5 процентов членов "Справедливости" поддержали спикера, в результате он набрал ровно 50 процентов голосов. Какое наименьшее количество депутатов могло входить в парламент?

2. В десятичной записи числа 1/14 вычеркнули цифры с 2004-й по 2009-ю после запятой. Что больше: 1/14 или полученное число?

3. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+x^2}\geq x+y+z\,.$$

4. В каждой клетке доски 100×100 стоит по фишке одного из 5000 цветов, по две фишки каждого цвета. Могло ли так оказаться, что любые две одноцветные фишки стоят в противоположных углах квадрата 4×4?

5. Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d, что $d^2 \leq n < 100d^2$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол D равен 50°. На сторонах AB, CD и AD отмечены точки E, F и G соответственно так, что $\angle AEF = \angle CFG = 90°$ и $AE = BE$. Докажите, что $AF+FG > BD$.

7. На плоскости проведено несколько красных, синих и зеленых прямых (прямые всех цветов присутствуют). Оказалось, что любая красная прямая пересекает ровно половину синих, а любая синяя — ровно половину зеленых. Докажите, что любая зеленая прямая пересекает ровно половину синих.

8. В совете директоров банка «Stupid Brothers» 68 членов. В зале совета директоров стоит ряд из 101 кресла. Во время заседания члены совета могут входить и выходить по одному или парами (если двое директоров входят вместе, то они вместе и уходят). Докажите, что секретарь совета может так рассаживать входящих, чтобы директора, пришедшие вместе, сидели рядом.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 7.11.2009

ГРУППА «СТАРТ»

1. В парламенте присутствуют депутаты от партий "Единение" и "Справедливость". При голосовании ровно 55 процентов членов "Единения" и ровно 5 процентов членов "Справедливости" поддержали спикера, в результате он набрал ровно 50 процентов голосов. Какое наименьшее количество депутатов могло входить в парламент?

2. Можно ли числа от 1 до 10 расставить в строку в таком порядке, чтобы сумма любых двух подряд стоящих чисел (кроме суммы двух последних) делилась на следующее за ними число?

3. Аня, Боря и Вася прошли один и тот же тест из 6 вопросов, на каждый из которых можно ответить "да" или "нет". Аня ответила "нет", "нет", "да", "да", "да", "да". Боря ответил "да", "нет", "нет", "да", "да", "да". Наконец, Вася ответил "нет", "да", "нет", "нет", "нет", "нет". Оказалось, что у Ани два неверных ответа, а у Бори только два верных. Сколько верных ответов у Васи?

4. В каждой клетке доски 10×10 стоит по фишке одного из 50 цветов, по две фишки каждого цвета. Могло ли так оказаться, что любые две одноцветные фишки стоят в противоположных углах квадрата 4×4?

5. В разложение натурального числа n на простые множители входят только двойки, тройки и пятёрки. Докажите, что n можно разложить на два натуральных сомножителя, отношение большего из которых к меньшему не превосходит 5.

6. Комиссия из 9 судей оценивает троих участников соревнования. Для этого каждый из судей выставляет лучшему, по его мнению, участнику 3 балла, худшему — 1 балл, а оставшемуся — 2 балла. Оказалось, что в результате все участники набрали различное число баллов. Один из судей заметил, что победитель набрал меньше всего троек, а занявший третье место — больше всего. Сколько баллов набрал победитель?

7. На доске написаны числа от 1 до 100. Вася и Петя по очереди вычеркивают написанные числа, начинает Вася. Тот, после чьего хода все оставшиеся числа будут одновременно делиться на натуральное число, большее 1, или не вычеркнутым останется ровно одно число, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

8. На плоскости проведено несколько красных, синих и зеленых прямых (прямые всех цветов присутствуют). Оказалось, что любая красная прямая пересекает ровно половину синих, а любая синяя — ровно половину зеленых. Докажите, что любая красная прямая пересекает ровно половину зеленых.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2009

СТАРШАЯ ГРУППА, бои за 1-4 места

1. Внутри квадрата расположен треугольник, не содержащий центр квадрата. Докажите, что одна из сторон треугольника не превосходит стороны квадрата.

2. Страна Олимпия расположена на n островах. Больше всего людей живет на острове Турнирном, и на всех островах живет разное количество людей. Правительство решило соединить некоторые острова мостами так, чтобы между каждыми двумя островами было не более одного моста и с любого острова можно было добраться по мостам до любого другого. Кроме того, если путь, ведущий с острова Турнирный на какой-нибудь другой, не проходит ни по какому мосту больше одного раза, количество жителей на каждом следующем острове этого пути должно быть меньше, чем на предыдущем. Сколькими способами правительство может исполнить свое намерение?

3. Нечетное число a, большее 17, таково, что $3a–2$ — точный квадрат. Докажите, что существуют различные натуральные числа b и c такие, что $a+b$, $a+c$, $b+c$ и $a+b+c$ — точные квадраты.

4. Вася Красный и Петя Синий играют на доске 100×100: Вася выбирает строку или столбец и закрашивает все ее клетки в красный цвет, затем Петя выбирает ранее не выбранную строку или столбец и закрашивает все ее клетки в синий цвет, потом Вася снова закрашивает все клетки какой–то ранее не выбиравшейся строки или столбца в красный цвет и т.д. (Если в выбранном ряду есть ранее закрашенные клетки, они перекрашиваются.) После 200 ходов строки и столбцы заканчиваются, игроки вычитают из количества синих клеток количество красных, и Вася платит Пете число рублей, равное получившейся разности (если она отрицательна, Петя платит Васе). Какой наибольший заработок может гарантировать себе Петя?

5. Числа от 1 до 100 раскрасили в синий и зеленый цвета (оба цвета встречаются). Оказалось, что у любых двух разноцветных чисел сумма синяя, а произведение зеленое (если результаты этих действий не превосходят 100). Оказалось, что число 13 — зеленое. Какой цвет может иметь число 70?

6. На медиане BM прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B выбрана точка K такая, что $AB = AK$. Прямая AK пересекает катет BC в точке L. Оказалось, что KL равно LC. Чему может быть равен угол CKM?

7. Произведение положительных чисел a, b, c равно 8. Докажите, что

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{125}{8}.$$

8. В шахматном турнире участвовали ученики нескольких школ. Каждые два ученика из разных школ сыграли между собой одну партию. Количества мальчиков и девочек, участвовавших в турнире, отличаются на 1, а количество партий между участниками одного пола, отличается от количества партий, сыгранных между участниками разного пола, не более чем на 1. Какое наибольшее количество школ могло выставить на турнир нечетное число участников?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2009

СТАРШАЯ ГРУППА, бои за 5-8 места

1. В треугольнике ABC угол A равен 45°. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $BC > CD$.

2. Страна Олимпия расположена на n островах. Больше всего людей живет на острове Турнирном, и на всех островах живет разное количество людей. Правительство решило соединить некоторые острова мостами так, чтобы между каждыми двумя островами было не более одного моста и с любого острова можно было добраться по мостам до любого другого. Кроме того, если путь, ведущий с острова Турнирный на какой-нибудь другой, не проходит ни по какому мосту больше одного раза, количество жителей на каждом следующем острове этого пути должно быть меньше, чем на предыдущем. Сколькими способами правительство может исполнить свое намерение?

3. Нечетное число a таково, большее 17, что $3a–2$ — точный квадрат. Докажите, что существуют различные натуральные числа b и c такие, что $a+b$, $a+c$, $b+c$ и $a+b+c$ — точные квадраты.

4. На окружности отмечено 6050 точек. Их раскраска в 10 цветов называется *хорошей*, если среди любых 100 подряд идущих точек встретятся точки всех 10 цветов. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что для любой хорошей раскраски среди некоторых k подряд идущих точек встретятся точки всех 10 цветов.

5. Числа от 1 до 100 раскрасили в синий и зеленый цвета (оба цвета встречаются). Оказалось, что у любых двух разноцветных чисел сумма синяя, а произведение зеленое (если результаты этих действий не превосходят 100). Оказалось, что число 13 — зеленое. Какой цвет может иметь число 70?

6. На медиане BM прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B выбрана точка K такая, что $AB = AK$. Прямая AK пересекает катет BC в точке L. Оказалось, что KL равно LC. Чему может быть равен угол CKM?

7. Положительные числа a и b таковы, что $ab = 2$. Докажите неравенство $(a^3+1/a)(b^3+1/b) \geq 25/2$.

8. В шахматном турнире участвовали ученики нескольких школ. Каждые два ученика из разных школ сыграли между собой одну партию. Количества мальчиков и девочек, участвовавших в турнире, отличаются на 1, а количество партий между участниками одного пола, отличается от количества партий, сыгранных между участниками разного пола, не более чем на 1. Какое наибольшее количество школ могло выставить на турнир нечетное число участников?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2009

МЛАДШАЯ ГРУППА, бой за 1 место

1. Положительные числа a и b таковы, что $ab = 2$. Докажите неравенство $(a^3+1/a)(b^3+1/b) \geq 25/2$.

2. Страна Олимпия расположена на n островах. Больше всего людей живет на острове Турнирном, и на всех островах живет разное количество людей. Правительство решило соединить некоторые острова мостами так, чтобы между каждыми двумя островами было не более одного моста и с любого острова можно было добраться по мостам до любого другого. Кроме того, если путь, ведущий с острова Турнирный на какой-нибудь другой, не проходит ни по какому мосту больше одного раза, количество жителей на каждом следующем острове этого пути должно быть меньше, чем на предыдущем. Сколькими способами правительство может исполнить свое намерение?

3. Нечетное число a, большее 100, таково, что $3a–2$ — точный квадрат. Докажите, что существуют различные натуральные числа b и c такие, что $a+b$, $a+c$, $b+c$ и $a+b+c$ — точные квадраты.

4. Вася Красный и Петя Синий играют на доске 100×100: Вася выбирает строку или столбец и закрашивает все ее клетки в красный цвет, затем Петя выбирает ранее не выбранную строку или столбец и закрашивает все ее клетки в синий цвет, потом Вася снова закрашивает все клетки какой–то ранее не выбиравшейся строки или столбца в красный цвет и т.д. (Если в выбранном ряду есть ранее закрашенные клетки, они перекрашиваются.) После 200 ходов строки и столбцы заканчиваются, игроки вычитают из количества синих клеток количество красных, и Вася платит Пете число рублей, равное получившейся разности (если она отрицательна, Петя платит Васе). Какой наибольший заработок может гарантировать себе Петя?

5. Найдите все пары простых чисел, которые отличаются на 2, а их сумма — степень простого числа.

6. Числа от 1 до 100 раскрасили в синий и зеленый цвета (оба цвета встречаются). Оказалось, что у любых двух разноцветных чисел сумма синяя, а произведение зеленое (если результаты этих действий не превосходят 100). Оказалось, что число 13 — зеленое. Какой цвет может иметь число 70?

7. На медиане BM прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B выбрана точка K такая, что $AB = AK$. Прямая AK пересекает катет BC в точке L. Оказалось, что KL равно LC. Чему может быть равен угол CKM?

8. На окружности отмечено 6050 точек. Их раскраска в 10 цветов называется *хорошей*, если среди любых 100 подряд идущих точек встретятся точки всех 10 цветов. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что для любой хорошей раскраски среди некоторых k подряд идущих точек встретятся точки всех 10 цветов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2009

МЛАДШАЯ ГРУППА

1. Положительные числа a и b таковы, что $ab = 2$. Докажите неравенство $(a^3+1/a)(b^3+1/b) \geq 25/2$.

2. Во время школьного шахматного турнира каждый ученик 7а класса сыграл ровно одну партию с каждым учеником 7б класса. При этом оказалось, что партий, в которых сыграли мальчик с девочкой ровно на 2 больше, чем остальных. Докажите, что суммарное количество учеников в этих двух классах нечетно.

3. Докажите, что существует такое натуральное число x, что сумма цифр числа x более, чем в 100 раз больше суммы цифр числа $3x$.

4. Вася и Петя по очереди красят клетки доски 100×100 в красный и синий цвета: Вася начинает и любую строку или столбец красит в красный цвет, Петя любую строку или столбец красит в синий цвет. Уже окрашенные клетки можно перекрашивать, но с каждой строкой или столбцом можно проделать только одну операцию. Когда все столбцы и строки покрашены, считают количество красных и синих клеток. Если больше красных — выигрывает Вася, если синих — Петя, если поровну — ничья. Может ли какой-то из игроков обеспечить себе победу?

5. Найдите все пары простых чисел, которые отличаются на 2, а их сумма — степень простого числа.

6. Числа от 1 до 100 раскрасили в синий и зеленый цвета (оба цвета встречаются). Оказалось, что у любых двух разноцветных чисел сумма синяя, а произведение зеленое (если результаты этих действий не превосходят 100). Оказалось, что число 13 — зеленое. Какой цвет может иметь число 70?

7. В треугольнике ABC угол A равен 45°. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $BC > CD$.

8. На окружности отмечено 6050 точек. Их раскраска в 10 цветов называется *хорошей*, если среди любых 100 подряд идущих точек встретятся точки всех 10 цветов. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что для любой хорошей раскраски среди некоторых k подряд идущих точек встретятся точки всех 10 цветов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2009

ГРУППА «СТАРТ», бои за 1-4 места

1. Докажите, что существует такое натуральное число x, что сумма цифр числа x более, чем в 100 раз больше суммы цифр числа $3x$.

2. В выпуклом n-угольнике отметили 5 вершин таким образом, что для каждого натурального числа k от 1 до 20 можно найти две отмеченные вершины, между которыми в одном из направлений находится ровно k сторон многоугольника. Чему могло быть равно n?

3. Даны два натуральных числа $a > b > 0$. Может ли разность чисел, первое из которых составлено из a подряд написанных чисел, равных b, а второе — из b подряд написанных чисел, равных a, быть простым числом?

4. Вася и Петя по очереди красят клетки доски 10×10 в красный и синий цвета: Вася начинает и любую строку или столбец красит в красный цвет, Петя любую строку или столбец красит в синий цвет. Уже окрашенные клетки можно перекрашивать, но с каждой строкой или столбцом можно проделать только одну операцию. Когда все столбцы и строки покрашены, считают количество красных и синих клеток. Если больше красных — выигрывает Вася, если синих — Петя, если поровну — ничья. Может ли какой-то из игроков обеспечить себе победу?

5. Найдите все пары простых чисел, которые отличаются на 2, а их сумма — степень простого числа.

6. Числа от 1 до 100 раскрасили в синий и зеленый цвета (оба цвета встречаются). Оказалось, что у любых двух разноцветных чисел сумма синяя, а произведение зеленое (если результаты этих действий не превосходят 100). Оказалось, что число 13 — зеленое. Какой цвет может иметь число 70?

7. На прямой расположено 4 точки A, B, C, D, причем именно в таком порядке. Оказалось, что сумма расстояний от A до B и D больше удвоенной суммы расстояний от C до B и D. Докажите, что сумма расстояний от A до B и C больше суммы расстояний от B до C и D.

8. В стране 13 городов. Между некоторым городами существуют шоссе с односторонним движением, причем ровно одно шоссе входит в каждый город и ровно одно выходит. Из каждого города выехало по автомобилю и они одновременно прибыли в соседние по шоссе города. Потом они снова одновременно выехали и прибыли в соседние по шоссе города. Оказалось, что в итоге автомобиль из первого города прибыл во второй, из второго — в третий, из третьего — в четвертый, ... , из тринадцатого — в первый. В какой город попал автомобиль из первого города за первый переезд?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2009

ГРУППА «СТАРТ», бои за 5-8 места

1. Докажите, что существует такое натуральное число x, что сумма цифр числа x более, чем в 10 раз больше суммы цифр числа $3x$.

2. В выпуклом n-угольнике отметили 5 вершин таким образом, что для каждого натурального числа k от 1 до 20 можно найти две отмеченные вершины, между которыми в одном из направлений находится ровно k сторон многоугольника. Чему могло быть равно n?

3. Какое наибольшее количество различных чисел можно выбрать таким образом, чтобы разность любых двух из них была не меньше 1 и не больше 3?

4. Вася и Петя по очереди красят клетки доски 10×10 в красный и синий цвета: Вася начинает и любую строку или столбец красит в красный цвет, Петя любую строку или столбец красит в синий цвет. Уже окрашенные клетки можно перекрашивать, но с каждой строкой или столбцом можно проделать только одну операцию. Когда все столбцы и строки покрашены, считают количество красных и синих клеток. Если больше красных — выигрывает Вася, если синих — Петя, если поровну — ничья. Может ли какой-то из игроков обеспечить себе победу?

5. Найдите все пары простых чисел, которые отличаются на 2, а их сумма — степень простого числа.

6. Числа от 1 до 100 раскрасили в синий и зеленый цвета (оба цвета встречаются). Оказалось, что у любых двух разноцветных чисел сумма синяя, а произведение зеленое (если результаты этих действий не превосходят 100). Оказалось, что число 4 — зеленое. Какой цвет может иметь число 20?

7. На прямой расположено 4 точки A, B, C, D, причем именно в таком порядке. Оказалось, что сумма расстояний от A до B и D вдвое больше суммы расстояний от C до B и D. Докажите, что расстояние от B до D вдвое больше расстояния от B до A.

8. В стране 4 города. Между некоторым городами существуют шоссе с односторонним движением, причем ровно одно шоссе входит в каждый город и ровно одно выходит. Из каждого города выехало по автомобилю и они одновременно прибыли в соседние по шоссе города. Потом они снова одновременно выехали и прибыли в соседние по шоссе города. Оказалось, что в итоге автомобиль из первого города прибыл во второй. Докажите, что автомобиль из второго города в итоге оказался в первом.