

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Даны целые числа $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ такие, что

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{10}| - |x_1 + x_2 + \dots + x_{10}| = 2.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или -1 .

2. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника ABC .

3. Докажите, что

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4} \right) \left(b^2 + a + \frac{3}{4} \right) \geq 2a \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(2b + \frac{1}{2} \right)$$

при всех положительных a и b .

4. Внутри угла MON отмечена точка X такая, что $\angle OMX = \angle ONX = 90^\circ$. На отрезках OM и ON отмечены точки Y и Z соответственно такие, что $XY \perp MZ$, а $XZ \perp NY$. Докажите, что $OM = ON$.

5. Сумма обратных величин 100 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 10000?

6. В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что в нем можно выбрать 50 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.

7. В квадрате $n \times n$ лежат 1004 доминошки (каждая покрывает две соседние клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). Какое наименьшее значение может принимать число n ?

8. Числа p и q — простые, $q - p = 2$. Решите в натуральных числах

уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Даны целые числа $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ такие, что

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{10}| - |x_1 + x_2 + \dots + x_{10}| = 2.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или -1 .

2. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника ABC .

3. Эксперт представляет судье 12 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2, 3 и 4 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?

4. Внутри угла MON отмечена точка X такая, что $\angle OMX = \angle ONX = 90^\circ$. На отрезках OM и ON отмечены точки Y и Z соответственно такие, что $XY \perp MZ$, а $XZ \perp NY$. Докажите, что $OM = ON$.

5. Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?

6. В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что в нем можно выбрать 25 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.

7. В квадрате $n \times n$ лежат 1004 доминошки (каждая покрывает две соседние клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). Какое наименьшее значение может принимать число n ?

8. При каком наименьшем n найдутся такие натуральные x и y , что $\text{НОД}(x, y) = 999$ и $\text{НОК}(x, y) = n!$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Даны целые числа x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| - |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 2.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или -1 .

2. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника ABC .

3. Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2 и 3 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?

4. Хитрый мальчик Игорь задумал 6 различных чисел a, b, c, d, e, f и произнес следующие утверждения: « $a > d$ », « $f > c$ », « $b > e$ », « $a > f$ », « $a > e$ », « $d > b$ », « $c > e$ ». Известно, что при этом он обманул не более двух раз. Докажите, что умный мальчик Костя на основании этих данных сможет найти хотя бы одно заведомо верное утверждение.

5. Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?

6. В выпуклом 12-угольнике проведено 12 диагоналей. Докажите, что какие-то три из них попарно пересекаются (диагонали, выходящие из одной вершины, считаются пересекающимися).

7. В треугольнике ABC из внутренней точки O опустили перпендикуляры на стороны AB и AC . Основания этих перпендикуляров обозначили D и E соответственно. Докажите, что если треугольники AOD и OEC равны, то точка E является серединой стороны AC .

8. При каком наименьшем n найдутся такие натуральные x и y , что $\text{НОД}(x, y) = 999$ и $\text{НОК}(x, y) = n!$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.12.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В квадрате $n \times n$ лежат 1004 доминошки (каждая покрывает две соседние клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). Какое наименьшее значение может принимать число n ?
2. Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?
3. В выпуклом 100-угольнике проведено 100 диагоналей. Докажите, что какие-то три из них попарно пересекаются (диагонали, выходящие из одной вершины, считаются пересекающимися).
4. В компании из 300 человек каждый имеет не менее 190 знакомых. Докажите, что можно в этой компании найти не менее 25 троек попарно знакомых людей.
5. Эксперт представляет судье 12 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2, 3 и 4 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?
6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника ABC .
7. Даны целые числа $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ такие, что
$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{10}| - |x_1 + x_2 + \dots + x_{10}| = 2.$$
Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или -1 .
8. Для натуральных чисел x и y нашлись такие различные простые числа p, q, r , что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Докажите, что одно из этих простых чисел равно 2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.12.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В квадрате $n \times n$ лежат 150 доминошек (каждая покрывает две соседние клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). Какое наименьшее значение может принимать число n ?
2. Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?
3. В выпуклом 12-угольнике проведено 12 диагоналей. Докажите, что какие-то три из них попарно пересекаются (диагонали, выходящие из одной вершины, считаются пересекающимися).
4. Трамвайный билет стоит 1 тугрик. У нескольких пассажиров имеются лишь монеты достоинством в 3 и 5 тугриков, а у кондуктора вообще ничего. Оказалось, что все пассажиры смогли заплатить за проезд и получить сдачу. Какая наименьшая сумма денег могла быть у пассажиров?
5. Эксперт представляет судье 12 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2, 3 и 4 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?
6. Даны целые числа x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что
$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| - |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 2.$$
Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или -1 .
7. В треугольнике ABC из внутренней точки O опустили перпендикуляры на стороны AB и AC . Основания этих перпендикуляров обозначили D и E соответственно. Докажите, что если треугольники AOD и OEC равны, то точка E является серединой стороны AC .
8. Зал для танцев имеет форму N -угольника. На танцы собралось k девушек. При каких k они все могут расположиться вдоль стен так, чтобы у каждой стены стояло поровну девушек. Считается, что

стоящий в углу человек находится у двух стен. Двое в одном углу стоять не могут.

ЯГЛУБОВ.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.12.2008

ЛИГА «СТАРТ»

1. Из доски 8×8 вырезаны четыре центральные клетки, образующие квадрат 2×2 . Какое наибольшее количество попарно не бьющих друг друга ферзей можно поставить на эту доску? (Ферзи, соединенные одним ходом, ведущим через одну или несколько вырезанных клеток, не бьют друг друга)
2. Среди всех чисел, делящихся на 11 и имеющих сумму цифр 600, найдите два наименьших.
3. Хитрый мальчик Игорь задумал 6 различных чисел a, b, c, d, e, f и произнес следующие утверждения: « $a > d$ », « $f > c$ », « $b > e$ », « $a > f$ », « $a > e$ », « $d > b$ », « $c > e$ ». Известно, что при этом он обманул не более двух раз. Докажите, что умный мальчик Костя на основании этих данных сможет найти хотя бы одно заведомо верное утверждение.
4. Дети в садике мастерили подарки воспитателям к Новому году. Всего в группе 17 ребятишек, и получилось, что любая компания из 5 детей сделала не больше 25 подарков, а каждая компания из трех детей – не меньше 14 подарков. Найдите, сколько всего подарков получают воспитатели.
5. Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет есть три монеты веса 1 г, три монеты веса 2 г и три монеты веса 3 г, а эксперт знает вес каждой монеты. Эксперт принес с собой прибор, который для двух групп монет сообщает, весят ли эти две группы одинаково или нет. Покажите, что за две такие операции эксперт сможет доказать судье, какая монета имеет какой вес.
6. На окружности отмечено 20 точек. Играют двое. За один ход разрешается закрасить треугольник с вершинами в отмеченных точках, если этот треугольник не пересекается с уже закрашенными (при этом новый треугольник может иметь с закрашенными треугольниками общие стороны). Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?
7. Домики четырех друзей стоят на одной прямой. Каждый из друзей называет суммарное расстояние от своего домика до всех остальных. Всегда ли по этим данными можно однозначно определить расстояние между крайними домиками?
8. Зал для танцев имеет форму 10-угольника. На танцы пришло k девушек. При каких k они могут расположиться вдоль стен так, чтобы у каждой стены стояло поровну девушек? Стоящий в углу человек считается стоящим сразу вдоль двух соответствующих стен. Больше одного человека в углу стоять в углу не может.