

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Из чисел $1, 2, \dots, 169$ выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.
2. На прямой расположено 100 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 100 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем 52 отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).
3. Докажите, что если $x+y = 1$, то $|(x^3-1)(y^3-1)| \geq 3xy$.
4. Точка E лежит на отрезке AC . Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и CDE с прямыми углами в вершине C лежат по разные стороны от прямой AC . Точки P, Q, R, S — середины отрезков AB, BD, DE и EA соответственно. Докажите, что $PQRS$ — квадрат.
5. У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 выписан наибольший нечётный делитель. Каких среди выписанных чисел больше: дающих остаток 1 или дающих остаток 3 при делении на 4?
6. Каждая клетка первого ряда таблицы 2×200 окрашена в один из четырех цветов таким образом, что никакие две одноцветные клетки не имеют общей стороны. Докажите, что каждую клетку второго ряда можно окрасить в один из тех же четырех цветов таким образом, что по-прежнему никакие две одноцветные клетки не будут иметь общей стороны, а во всей таблице окажется ровно по 100 клеток каждого из цветов.
7. В графе 34 вершины, степень каждой не менее 4, и для каждой вершины есть еще ровно одна вершина той же степени. Докажите, что в этом графе есть три вершины, попарно соединенные ребрами.
8. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки X и Y . Прямая, параллельная AB , проходящая через X , пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, параллельная BC , проходящая через Y , пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Докажите, что треугольники XRS и YPQ равновелики.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Из чисел $1, 2, \dots, 169$ выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.
2. На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).
3. Сумма положительных чисел x и y равна 1. Докажите, что
$$(1-x^3)(1-y^3) \geq 2xy.$$
4. Точка E лежит на отрезке AC . Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и CDE с прямыми углами в вершине C лежат по разные стороны от прямой AC . Точки P, Q, R, S — середины отрезков AB, BD, DE и EA соответственно. Докажите, что $PQRS$ — квадрат.
5. У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 выписан наибольший нечётный делитель. Каких среди выписанных чисел больше: дающих остаток 1 или дающих остаток 3 при делении на 4?
6. Каждая клетка первого ряда таблицы 2×200 окрашена в один из четырех цветов таким образом, что никакие две одноцветные клетки не имеют общей стороны. Докажите, что каждую клетку второго ряда можно окрасить в один из тех же четырех цветов таким образом, что по-прежнему никакие две одноцветные клетки не будут иметь общей стороны, а во всей таблице окажется ровно по 100 клеток каждого из цветов.
7. В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга, ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей, ..., ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.
8. На диагонали AC квадрата $ABCD$ выбраны точки X и Y таким образом, что Y лежит между C и X . Прямая, проходящая через X параллельно AB , пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, проходящая через Y параллельно BC , пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Оказалось, что $\angle RYP = \angle QXS$. Докажите, что $AX = CY$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Из чисел 1, 2, ..., 169 выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.

2. На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).

3. Сумма положительных чисел x и y равна 1. Докажите, что

$$(1-x^2)(1-y^2) \geq xy.$$

4. Каждое натуральное число покрашено в один из двух цветов. Докажите, что какие-то два одноцветных числа отличаются либо на 6, либо на 8.

5. Ваня задумал натуральное число, а учительница разрешила ему прибавлять к имеющемуся числу 1 или делить его на любой его натуральный делитель, отличный от 1. Докажите, что, как бы Ваня ни старался избежать этого, за несколько таких действий у него получится двойка или степень двойки.

6. Даны n куч камней: в первой куче 1 камень, во второй — 2, в третьей — три, ..., в n -й — n камней. За один ход разрешается взять любые три кучи, объединить их в одну, после чего добавить к получившейся куче еще один новый камень. Через несколько таких операций осталась всего одна куча. Докажите, что количество камней в этой куче не делится на 3.

7. Запасы нефти к началу XX века составляли 20 млрд баррелей. Человечество тратит не менее 50 млн баррелей в год. До начала 2000 года истрачено 10 млрд баррелей, с середины XX века по конец 2008 года — тоже 10 млрд баррелей. Докажите, что при сохранении средних темпов расходования, сложившихся в период 2000 – 2008 гг., нефть закончится не позднее 2036 года.

8. На диагонали AC квадрата $ABCD$ выбраны точки X и Y таким образом, что Y лежит между C и X . Прямая, проходящая через X параллельно AB , пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, проходящая через Y параллельно BC , пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Оказалось, что $\angle RYP = \angle QXS$. Докажите, что $AX = CY$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.12.2008

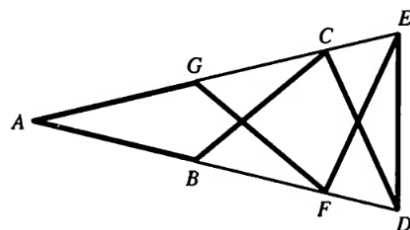
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Из чисел $1, 2, \dots, 169$ выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.
2. На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).
3. В компании 34 человека, причем ровно двое имеют по четыре знакомых, ровно двое — по пять знакомых, ..., ровно двое имеют по 20 знакомых. Докажите, что в этой компании найдутся трое попарно знакомых.
4. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все натуральные числа так, чтобы любые два натуральных числа, отличающиеся на 12 или 16, были покрашены в разные цвета?
5. У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 выписан наибольший нечётный делитель. Каких среди выписанных чисел больше: дающих остаток 1 или дающих остаток 3 при делении на 4?
6. Каждая клетка первого ряда таблицы 2×200 окрашена в один из четырех цветов таким образом, что никакие две одноцветные клетки не имеют общей стороны. Докажите, что каждую клетку второго ряда можно окрасить в один из тех же четырех цветов таким образом, что по-прежнему никакие две одноцветные клетки не будут иметь общей стороны, а во всей таблице окажется ровно по 100 клеток каждого из цветов.
7. Запасы нефти к началу 1900 года составляли 20 млрд баррелей. Человечество тратит не менее 50 млн баррелей в год. До начала 2000 года истрачено 10 млрд баррелей, с начала 1950 года по конец 2008 года — тоже 10 млрд баррелей. Докажите, что при сохранении средних темпов расходования, сложившихся в период 2000 – 2008 гг., нефть закончится не позднее 2036 года.
8. На диагонали AC квадрата $ABCD$ выбраны точки X и Y таким образом, что Y лежит между C и X . Прямая, проходящая через X параллельно AB , пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, проходящая через Y параллельно BC , пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Оказалось, что $\angle RYP = \angle QXS$. Докажите, что $AX = CY$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.12.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Из чисел $1, 2, \dots, 169$ выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.
2. На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).
3. Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. На белой клетчатой доске размером 13×12 тот, чей ход, выбирает любую незакрашенную клетку и целиком закрашивает один из четырёх отрезков горизонталей или вертикалей, ведущих от этой клетки на край доски (есть ли там уже закрашенные клетки — неважно). Выигрывает тот, после хода которого доска оказалась закрашена целиком. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?
4. В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга, ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей, ..., ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.
5. Ваня задумал натуральное число, а учительница разрешила ему прибавлять к имеющемуся числу 1 или делить его на 2, если оно чётно. Докажите, что, как бы Ваня ни старался избежать этого, за несколько таких действий у него получится двойка или степень двойки.
6. На шахматной доске стоят несколько ладей. Их раскрашивают так, чтобы ладьи, бьющие друг друга, были раскрашены в разные цвета. Каким наименьшим количеством цветов гарантированно можно обойтись?
7. Запасы нефти к началу XX века составляли 20 млрд баррелей. Человечество тратит не менее 50 млн баррелей в год. До начала 2000 года истрачено 10 млрд баррелей, с середины XX века по конец 2008 года — тоже 10 млрд баррелей. Докажите, что при сохранении средних темпов расходования, сложившихся в период 2000 – 2008 гг., нефть закончится не позднее 2036 года.
8. Отрезки AG , GF , FE , ED , DC , CB , BA , изображённые на рисунке, равны. Найдите углы треугольника DAE .



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.12.2008

ЛИГА «СТАРТ»

1. Из чисел $1, 2, \dots, 169$ выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.
2. На прямой расположено 6 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 6 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, и любые два отрезка с номерами одной четности тоже пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее чем пятью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).
3. На переправу пришли несколько мальчиков, вес каждого из которых был равен 40 кг, 50 кг или 60 кг, причем мальчиков каждого веса в этой компании было как минимум двое. Они собирались переправиться на другой берег, поэтому взяли с собой лодку. Какой минимальной грузоподъемности должна быть лодка, чтобы все мальчики сумели переправиться на другой берег?
4. Каждое натуральное число покрашено в один из двух цветов. Докажите, что какие-то два одноцветных числа отличаются на 6 или на 8.
5. Ваня задумал натуральное число, а учительница разрешила ему прибавлять к имеющемуся числу 1 или делить его на 2, если оно чётно. Докажите, что за несколько таких действий у него получится двойка или степень двойки, как бы он ни пытался избежать этого.
6. Шумахер убегает от тигра, кружа вокруг стадиона. За первый час Шумахер обогнал тигра на три круга, после чего увеличил скорость на 1 км/ч, и за второй час обогнал тигра на четыре круга. Найдите длину круга.
7. Двое играют в игру на белой клетчатой доске размером 13×12 . За ход разрешается выбрать любую незакрашенную клетку и закрасить одну из четырёх горизонтальных или вертикальных «дорожек» от этой клетки до края доски (дорожка обязательно включает начальную клетку, а есть ли там уже закрашенные клетки, неважно). Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?
8. На рисунке справа — 10 отрезков. Можно ли так соединить отрезками концы некоторых из них, чтобы получились две несамопересекающиеся ломаные, не имеющие общих точек друг с другом, причем каждый из отрезков на рисунке был звеном одной из ломаных?

