

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2.12.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Даны 11 различных чисел. Их расставляют по кругу и находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Докажите, что числа можно расставить так, чтобы произведение всех 11 полученных разностей было положительным.
2. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через a минут, а Петров впервые обогнал Сидорова через b минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова?
3. На основании BC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка X . Докажите, что периметр треугольника ABX больше половины периметра треугольника ACX .
4. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c . Докажите, что число $(a+b)(b+c)(c+a)$ не может быть степенью двойки.
5. Точки M и N выбраны на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таким образом, что $AM/BM = (BC+CN)/BN$, $\angle ACB = 2\angle MNB$. Докажите, что $AC = BC$.
6. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 37, в записи которых встречается по разу каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?
7. На недавней математической олимпиаде командам-участницам были предложены девять задач. В итоге получилось, что каждая команда решила ровно три задачи, каждые две команды решили разные наборы задач и для любых трех команд можно найти задачу, которую не решила ни одна из них. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в этой олимпиаде?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2.12.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Петя окрасил все стороны картонного треугольника, а потом разрезал его по линиям, параллельным сторонам, на несколько одинаковых треугольников. Среди получившихся треугольников оказалось 18 таких, у которых хотя бы одна сторона окрашена. Сколько получилось треугольников, у которых все стороны не окрашены?
2. Даны n ($n \geq 3$) различных чисел. Их расставляют по кругу и находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Докажите, что числа можно расставить так, чтобы произведение всех n полученных разностей было положительным.
3. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через 3 минуты, а Петров впервые обогнал Сидорова через 6 минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова?
4. У каждого из двух десятизначных чисел все цифры различны. Могут ли все цифры их произведения быть одинаковыми?
5. Замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений, пересекается с квадратом в 15 точках. Докажите, что либо она проходит через хотя бы одну из вершин квадрата, либо хотя бы одна из её вершин лежит на стороне квадрата.
6. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c . Докажите, что число $(a+b)(b+c)(c+a)$ не может быть степенью двойки.
7. На недавней математической олимпиаде командам-участницам были предложены девять задач. В итоге получилось, что каждая команда решила ровно три задачи, каждые две команды решили разные наборы задач и для любых трех команд можно найти задачу, которую не решила ни одна из них. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в этой олимпиаде?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2.12.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. Числа 1, 2, ..., 11 расставляют по кругу и находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Как сделать это, чтобы произведение всех 11 полученных разностей было положительным?
2. Петя окрасил все стороны картонного треугольника, а потом разрезал его по линиям, параллельным сторонам, на несколько одинаковых треугольников. Среди получившихся треугольников оказалось 18 таких, у которых хотя бы одна сторона окрашена. Сколько получилось треугольников, у которых все стороны не окрашены?
3. У каждого из двух десятизначных чисел все цифры различны, а у их суммы все цифры одинаковы. Чему может равняться эта сумма?
4. 8 волейбольных команд сыграли по разу каждая с каждой. Докажите, что из них можно выбрать четыре команды, которые в играх между собой набрали, соответственно, 3, 2, 1 и 0 очков. За победу в волейболе дают 1 очко, за поражение — 0 очков, ничьих не бывает.
5. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через 3 минуты, а Петров впервые обогнал Сидорова через 6 минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова?
6. Замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений, пересекается с квадратом в 15 точках. Докажите, что либо она проходит через хотя бы одну из вершин квадрата, либо хотя бы одна из её вершин лежит на стороне квадрата.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ СТАРШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. Даны 11 различных чисел. Их расставляют по кругу и находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Докажите, что числа можно расставить так, чтобы произведение всех 11 полученных разностей было положительным.

Решение. Запишем все данные по кругу в произвольном порядке. Если произведение разностей положительно — всё в порядке. Если нет, запишем все числа в обратном порядке. Все разности поменяют знак, и их произведение, поскольку сомножителей нечётное число, — тоже.

Задача 2. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через a минут, а Петров впервые обогнал Сидорова через b минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова?

Ответ: $ab/(a+b)$. **Решение.** Когда один бегун впервые обгоняет другого, это означает, что тот, кто обгоняет, пробежал ровно на круг больше. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Петрова на $1/a$ круга, а Петров каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/b$ круга. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/a + 1/b$ часть круга, и обгонит его на круг через $1/(1/a + 1/b) = ab/(a+b)$ минут.

Задача 3. На основании BC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка X . Докажите, что периметр треугольника ABX больше половины периметра треугольника ACX .

Решение. Положим $AB = AC = m$. Поскольку хотя бы один из двух смежных углов AXB и AXC не меньше 90° , $AX < m$. Далее, $CX < AX + AC < 2m$, откуда $AX + AC + CX < 4m$. С другой стороны, $AX + XB > AB = m$, откуда $AX + XB + AB > 2m = 4m/2 > (AX + AC + CX)/2$, что и требовалось доказать.

Задача 4. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c . Докажите, что число $(a+b)(b+c)(c+a)$ не может быть степенью двойки.

Решение. Поскольку любой делитель степени двойки — степень двойки, все три суммы $a+b, b+c, c+a$ должны быть степенями двойки. Но три различные степени двойки никогда не удовлетворяют неравенству треугольника, а три эти суммы — всегда.

Задача 5. Точки M и N выбраны на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таким образом, что $AM/BM = (BC+CN)/BN$, $\angle ACB = 2\angle MNB$. Докажите, что $AC = BC$.

Первое решение. Проведём биссектрису CL треугольника ABC . Она параллельна MN , потому что $\angle BCL = \angle ACB/2 = \angle MNB$. Поскольку $AC/BC = AL/BL$, достаточно доказать, что $AL = BL$. Заметим, что $(BC+CN)/BN = 1 + 2CN/BN = 1 + 2LM/BM$, а $AM/BM = AL/BM + LM/BM$. Приравнявая, получаем $1 + 2LM/BM = AL/BM + LM/BM$, откуда $1 + LM/BM = AL/BM$. Умножая на BM , получаем $BM + LM = AL$, то есть $AL = BL$, что и требовалось доказать.

Второе решение. На продолжении стороны BC за точку C отметим точку K такую, что $BC = CK$. Тогда $AM/BM = (BC+CN)/BN = (KC+CN)/BN = KN/BN$, следовательно,

$AK \parallel MN$. Тогда $\angle AKC = \angle MNB = \angle ACB/2$, откуда по теореме о внешнем угле получаем $\angle KAC = \angle ACB/2 = \angle AKC$, следовательно, $AC = CK = BC$.

Задача 6. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 37, в записи которых встречается по разу каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Ответ: 48. **Решение.** Поскольку $1+2+3+4+5+6 = 21$ делится на 3, всякое искомое число делится на $37 \cdot 3 = 111$. Поскольку $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{def})$, число $\overline{abcdef}$ делится на 111 тогда и только тогда, когда на 111 делится сумма $\overline{abc} + \overline{def}$. Покажем, что в этом случае такая сумма трёхзначна. В самом деле, четырёхзначной она может быть только если числа $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ начинаются на 5 и 6 или на 4 и 6. В первом случае сумма $\overline{abc} + \overline{def}$ больше, чем 1110, но меньше, чем 1221 (максимум — $642+531 = 1173$, минимум — $613+524 = 1137$), во втором — больше, чем 999, но меньше, чем 1110 (максимум — $421+652 = 1083$). Далее, если сумма $\overline{abc} + \overline{def}$ трёхзначна, то все её цифры одинаковы, и не меньше, чем 4 (минимум суммы $\overline{abc} + \overline{def}$ равен $135+246 = 381$). Поэтому при сложении $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ «столбиком» не будет переносов. В самом деле, сумма любых двух цифр в них даже с учётом возможного переноса из предыдущего разряда не превышает $6+5+1 = 12$, и стало быть, если будет перенос, то в сумме появится цифра 0, 1 или 2. Таким образом, если сумма $\overline{abc} + \overline{def}$ делится на 111, то сумма цифр у неё равна $1+2+3+4+5+6$, то есть это число 777. Чтобы получить такую сумму, необходимо и достаточно, чтобы у чисел $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ в одинаковых разрядах стояли цифры 1 и 6, 2 и 5, 4 и 3. Поэтому количество искомых чисел равно количеству способов выбрать по одной цифре из трёх пар и разместить их по трём разрядам, то есть $2^3 \cdot 3! = 48$.

Задача 7. На недавней математической олимпиаде командам-участницам были предложены девять задач. В итоге получилось, что каждая команда решила ровно три задачи, каждые две команды решили разные наборы задач и для любых трех команд можно найти задачу, которую не решила ни одна из них. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в этой олимпиаде?

Ответ: 56. **Решение.** Пример на 56 команд получаем, выбрав 8 задач и рассмотрев все 56 составленных из них троек: они удовлетворяют всем условиям задачи. Допустим, мы выбрали больше 56 троек задач. Назовём две непересекающиеся тройки задач *запрещённой парой*, если задачи, не входящие ни в одну из этих двух троек, образуют выбранную тройку. Понятно, что хотя бы одна из двух троек, образующих запрещённую пару, не должна быть выбранной. Поскольку из шести задач можно выбрать три $C_6^3 = 20$ способами, каждая выбранная тройка порождает 10 запрещённых пар, причём, очевидно, разные тройки порождают разные запрещённые пары. При этом для каждой тройки задач существует 20 не пересекающихся с ней, то есть каждая тройка входит не больше, чем в 20 запрещённых пар. Если мы выбрали хотя бы 57 троек, у нас не меньше 570 запрещённых пар, в которые входит не менее $570/20 > 28$ различных троек задач. Но из 9 задач можно образовать лишь $C_9^3 = 84$ тройки, поэтому невыбранными останутся максимум 27 троек. Значит, какие-то две выбранные задачи образуют запрещённую тройку. Противоречие.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ МЛАДШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *Петя окрасил все стороны картонного треугольника, а потом разрезал его по линиям, параллельным сторонам, на несколько одинаковых треугольников. Среди получившихся треугольников оказалось 18 таких, у которых хотя бы одна сторона окрашена. Сколько получилось треугольников, у которых все стороны не окрашены?*

Ответ: 31. Решение. Очевидно, у трёх треугольников, примыкающих к вершинам исходного треугольника, окрашены по две стороны, а у остальных пятнадцати — по одной стороне. Поэтому каждая сторона исходного треугольника оказалась разбита на $21:3 = 7$ частей, всего треугольников получилось $7^2 = 49$, а неокрашенных — $49 - 18 = 31$.

Задача 2. *Даны n ($n \geq 3$) различных чисел. Их расставляют по кругу и находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Докажите, что числа можно расставить так, чтобы произведение всех n полученных разностей было положительным.*

Решение. Достаточно расставить числа так, чтобы они по часовой стрелке убывали от наибольшего до наименьшего, а потом поменять местами самое большое число со вторым по величине.

Задача 3. *Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через 3 минуты, а Петров впервые обогнал Сидорова через 6 минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова?*

Ответ: Через 2 минуты. Решение. Когда один бегун впервые обгоняет другого, это означает, что тот, кто обгоняет, пробежал ровно на круг больше. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Петрова на $1/3$ круга, а Петров каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/6$ круга. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/3 + 1/6 = 1/2$ часть круга, и обгонит его на круг через 2 минуты.

Задача 4. *У каждого из двух десятизначных чисел все цифры различны. Могут ли все цифры их произведения быть одинаковыми?*

Ответ: Нет. Решение. У каждого из сомножителей сумма цифр равна 45, то есть оба они делятся на 9. Стало быть, их произведение должно делиться на 81. По условию оно равно $\overline{AKA} = A \cdot 1 \dots 1$, причём второй сомножитель записан 19 или 20 единицами. Но тогда он не делится даже на 3, а число A делится самое большее на 9, так что $\overline{AKA}$ не делится на 81.

Задача 5. *Замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений, пересекается с квадратом в 15 точках. Докажите, что либо она проходит через хотя бы одну из вершин квадрата, либо хотя бы одна из её вершин лежит на стороне квадрата.*

Решение. Обойдём ломаную по кругу. Если утверждение задачи неверно, то мы каждый раз, проходя через точку пересечения ломаной с квадратом, будем либо выходить изнутри квадрата наружу, либо попадать снаружи внутрь квадрата. Но тогда, на ломаной будут чередоваться участки, лежащие внутри и снаружи квадрата, и их в силу этого должно быть чётное число, а их — 15.

Задача 6. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c . Докажите, что число $(a+b)(b+c)(c+a)$ не может быть степенью двойки.

Решение. Поскольку любой делитель степени двойки — степень двойки, все три суммы $a+b, b+c, c+a$ должны быть степенями двойки. Но три различные степени двойки никогда не удовлетворяют неравенству треугольника, а три эти суммы — всегда.

Задача 7. На недавней математической олимпиаде командам-участницам были предложены девять задач. В итоге получилось, что каждая команда решила ровно три задачи, каждые две команды решили разные наборы задач и для любых трех команд можно найти задачу, которую не решила ни одна из них. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в этой олимпиаде?

Ответ: 56. Решение. Пример на 56 команд получаем, выбрав 8 задач и рассмотрев все 56 составленных из них троек: они удовлетворяют всем условиям задачи. Допустим, мы выбрали больше 56 троек задач. Назовём две непересекающиеся тройки задач *запрещённой парой*, если задачи, не входящие ни в одну из этих двух троек, образуют выбранную тройку. Понятно, что хотя бы одна из двух троек, образующих запрещённую пару, не должна быть выбранной. Поскольку из шести задач можно выбрать три $C_6^3 = 20$ способами, каждая выбранная тройка порождает 10 запрещённых пар, причём, очевидно, разные тройки порождают разные запрещённые пары. При этом для каждой тройки задач существует 20 не пересекающихся с ней, то есть каждая тройка входит не больше, чем в 20 запрещённых пар. Если мы выбрали хотя бы 57 троек, у нас не меньше 570 запрещённых пар, в которые входит не менее $570/20 > 28$ различных троек задач. Но из 9 задач можно образовать лишь $C_9^3 = 84$ тройки, поэтому невыбранными останутся максимум 27 троек. Значит, какие-то две выбранные задачи образуют запрещённую тройку. Противоречие.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ»

Задача 1. Числа 1, 2, ..., 11 расставляют по кругу и находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Как сделать это, чтобы произведение всех 11 полученных разностей было положительным?

Решение. Например, так (по часовой стрелке): 1, 2, ..., 9, 11, 10.

Задача 2. Петя окрасил все стороны картонного треугольника, а потом разрезал его по линиям, параллельным сторонам, на несколько одинаковых треугольников. Среди получившихся треугольников оказалось 18 таких, у которых хотя бы одна сторона окрашена. Сколько получилось треугольников, у которых все стороны не окрашены?

Ответ: 31. **Решение.** Очевидно, у трёх треугольников, примыкающих к вершинам исходного треугольника, окрашены по две стороны, а у остальных пятнадцати — по одной стороне. Поэтому каждая сторона исходного треугольника оказалась разбита на $21:3 = 7$ частей, всего треугольников получилось $7^2 = 49$, а неокрашенных — $49 - 18 = 31$.

Задача 3. У каждого из двух десятизначных чисел все цифры различны, а у их суммы все цифры одинаковы. Чему может равняться эта сумма?

Ответ: Только 9 999 999 999. **Решение.** $1\ 234\ 567\ 890 + 8\ 765\ 432\ 109 = 9\ 999\ 999\ 999$. Числа $1\ 111\ 111\ 111$, ..., $8\ 888\ 888\ 888$ и $11\ 111\ 111\ 111$ получиться не могут, потому что не делятся на 9 (а оба слагаемых — делятся, потому что делятся на 9 суммы их цифр), а числа, большие $11\ 111\ 111\ 111$, записываемые одинаковыми цифрами, потому что любая сумма двух десятизначных чисел меньше, чем 20 000 000 000.

Задача 4. 8 волейбольных команд сыграли по разу каждая с каждой. Докажите, что из них можно выбрать четыре команды, которые в играх между собой набрали, соответственно, 3, 2, 1 и 0 очков. За победу в волейболе дают 1 очко, за поражение — 0 очков, ничьих не бывает.

Решение. Найдётся команда А, которая выиграла больше половины игр (иначе побед будет меньше, чем игр, чего не может быть из-за отсутствия ничьих). У этой команды не меньше 4 побед. Рассмотрим только команды, проигравшие команде А. Среди них найдётся команда Б, выигравшая не менее, чем у двух из остальных. Пусть В и Г — две из команд, проигравших как А, так и Б. Поскольку одна из них выиграла у другой, в «микротурнире» между командами А, Б, В и Г команда А набрала 3 очка, команда Б — 2, команда В — 1 и команда Г — 0 очков.

Задача 5. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через 3 минуты, а Петров впервые обогнал Сидорова через 6 минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова?

Ответ: Через 2 минуты. **Решение.** Когда один бегун впервые обгоняет другого, это означает, что тот, кто обгоняет, пробежал ровно на круг больше. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Петрова на $1/3$ круга, а Петров каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/6$ круга. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/3 + 1/6 = 1/2$ часть круга, и обгонит его на круг через 2 минуты.

Задача 6. Замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений, пересекается с квадратом в 15 точках. Докажите, что либо она проходит через хотя бы одну из вершин квадрата, либо хотя бы одна из её вершин лежит на стороне квадрата.

Решение. Обойдём ломаную по кругу. Если утверждение задачи неверно, то мы каждый раз, проходя через точку пересечения ломаной с квадратом, будем либо выходить изнутри квадрата наружу, либо попадать снаружи внутрь квадрата. Но тогда, на ломаной будут чередоваться участки, лежащие внутри и снаружи квадрата, и их в силу этого должно быть чётное число, а их — 15.