

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Три прямоугольника с соответственно параллельными сторонами полностью покрывают стороны данного треугольника. Докажите, что они покрывают и сам треугольник.
2. Произведение всех простых чисел, больших 3 и меньших n , имеет сумму цифр 8. Чему оно может быть равно?
3. Пусть $x \leq y \leq z$ — вещественные числа такие, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что $xz < 1/2$.
4. На доске написано число 1. Раз в минуту вместо каждой единицы на доске пишут 100, а вместо каждого нуля — 011. Докажите что через час количество пар рядом стоящих нулей будет равно количеству рядом пар стоящих единиц.
5. В стране Уралии 2007 городов. Из некоторых городов имеются прямые авиарейсы в другие города (каждый рейс — односторонний). Оказалось, что для любых двух городов A и B хотя бы из одного из них можно добраться в другой на самолете (возможно, с пересадками). Докажите, что есть город, из которого можно добраться по крайней мере в 1003 других и в который можно добраться по крайней мере из 1003 других.
6. На шахматной доске 10×100 стоят два слона: белый в левом нижнем углу и черный в правом верхнем. Два игрока по очереди делают ходы слонами (первый белым, а второй черным). Игрок, поставивший своего слона под бой другого, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?
7. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD нашлась такая точка P , что $AP = BC$ и $\angle PBA = \angle BAC$. Докажите, что $BP < AP + CD$.
8. Докажите, что для бесконечно многих натуральных n ровно два из трёх чисел n , $n+2$ и $n+64$ являются суммами трёх кубов натуральных чисел.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА

1. Три прямоугольника с соответственно параллельными сторонами полностью покрывают стороны данного треугольника. Докажите, что они покрывают и сам треугольник.
2. Произведение всех простых чисел, больших 3 и меньших n , имеет сумму цифр 8. Чему оно может быть равно?
3. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на несколько (конечное число) треугольников, у каждого из которых есть угол, равный 36° .
4. a, b, c, d — натуральные числа. Докажите, что для некоторых различных натуральных x и y
$$\left[\frac{ax+b}{cx+d} \right] = \left[\frac{ay+b}{cy+d} \right].$$
5. Натуральные числа раскрашены в 2008 цветов. Докажите, что можно указать цвет и натуральное число n так, чтобы нашлось бесконечно много пар чисел этого цвета с разностью n .
6. На международную конференцию прибыло по два участника из 27 стран. Можно ли так рассадить всех участников за круглым столом, чтобы между каждыми двумя участниками из одной страны сидело ровно 9 других участников?
7. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что $AF = FE = BC$ и $BE = CD$. Известно также, что $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Докажите, что $BC + BD > AB$.
8. a и m — натуральные числа, x — целое число такое, что $a^2x - a$ делится на m . Докажите, что для некоторого целого y оба числа $a^2y - a$ и $ay^2 - y$ делятся на m .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Три прямоугольника с соответственно параллельными сторонами полностью покрывают стороны данного треугольника. Докажите, что они покрывают и сам треугольник.
2. Произведение всех простых чисел, больших 3 и меньших n , имеет сумму цифр 8. Чему оно может быть равно?
3. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на несколько (конечное число) треугольников, у каждого из которых есть угол, равный 36° .
4. a, b, c, d — натуральные числа. Докажите, что для некоторых различных натуральных x и y
$$\left[\frac{ax+b}{cx+d} \right] = \left[\frac{ay+b}{cy+d} \right].$$
5. Натуральные числа раскрашены в 2008 цветов. Докажите, что можно указать цвет и натуральное число n так, чтобы нашлось бесконечно много пар чисел этого цвета с разностью n .
6. На международную конференцию прибыло по два участника из 27 стран. Можно ли так рассадить всех участников за круглым столом, чтобы между каждыми двумя участниками из одной страны сидело ровно 9 других участников?
7. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что $AF = FE = BC$ и $BE = CD$. Известно также, что $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Докажите, что $BC + BD > AB$.
8. a и m — натуральные числа, x — целое число такое, что $a^2x - a$ делится на m . Докажите, что для некоторого целого y оба числа $a^2y - a$ и $ay^2 - y$ делятся на m .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТО

1. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разрезать на несколько (конечное число) треугольников, у каждого из которых есть угол, равный 60° .
2. Произведение всех простых чисел, больших 3 и меньших n , имеет сумму цифр 8. Чему оно может быть равно?
3. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что $AF = FE = BC$ и $BE = CD$. Известно также, что $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Докажите, что $BC + BD > AB$.
4. Натуральные числа раскрашены в 10 цветов. Докажите, что можно указать цвет и натуральное число n так, чтобы нашлось бесконечно много пар чисел указанного цвета с разностью n .
5. На международную конференцию прибыло по два участника из 27 стран. Можно ли так рассадить всех участников за круглым столом, чтобы между каждыми двумя участниками из одной страны сидело ровно 9 других участников?
6. В стране 2007 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами с односторонним движением. Известно, что для любых двух городов A и B можно проехать либо из A в B , либо из B в A (а возможно, и в обоих направлениях) не нарушая правил дорожного движения (при этом маршрут может проходить и через другие города). Докажите, что найдется город X такой, что из X можно попасть как минимум в 1003 других города и в X можно попасть как минимум из 1003 других городов.
7. В двух противоположных углах доски 10×100 стоят шахматные слоны. Двое игроков ходят по очереди. Каждым ходом игрок двигает своего слона. Побеждает тот, кто сможет поставить своего слона под бой слона соперника. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его соперник? (Напомним, что слон ходит по диагонали на любое количество клеток.)
8. В таблице 1000×4 в верхней строке записаны числа 1, 9, 6, 8. Следующая строка заполняется таким образом: в каждую клетку пишется сумма трех чисел предыдущей строки, не стоящих над этой клеткой, уменьшенная на число, стоящее над данной клеткой. Какое число будет стоять в правом нижнем углу таблицы?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО

1. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разрезать на несколько (конечное число) треугольников, у каждого из которых есть угол, равный 60° .
2. Произведение всех простых чисел, больших 3 и меньших n , имеет сумму цифр 8. Чему оно может быть равно?
3. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что $AF = FE = BC$ и $BE = CD$. Известно также, что $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Докажите, что $BC + BD > AB$.
4. Натуральные числа раскрашены в два цвета. Докажите, что можно указать цвет и натуральное число n так, чтобы нашлось бесконечно много пар чисел указанного цвета с разностью n .
5. На международную конференцию прибыло по два участника из 27 стран. Можно ли так рассадить всех участников за круглым столом, чтобы между каждыми двумя участниками из одной страны сидело ровно 9 других участников?
6. Есть 100 карточек, у каждой из которых одна сторона черная, а другая — белая. Карточки лежат на столе белой стороной вверх. Костя перевернул 50 карточек, затем Сережа перевернул 60 карточек, а после этого Оля перевернула 70 карточек. В результате все 100 карточек оказались повернуты черной стороной вверх. Сколько карточек могло быть перевернуто три раза?
7. В какое минимальное количество цветов надо покрасить диагонали, стороны и вершины правильного 17-угольника, чтобы отрезки одного цвета не должны имели общих вершин и цвет каждой вершины отличался от цвета исходящих из нее отрезков.
8. В таблице 1000×4 в верхней строке записаны числа 1, 9, 6, 8. Следующая строка заполняется таким образом: в каждую клетку пишется сумма трех чисел предыдущей строки, не стоящих над этой клеткой, уменьшенная на число, стоящее над данной клеткой. Какое число будет стоять в правом нижнем углу таблицы?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разрезать на несколько (конечное число) треугольников, у каждого из которых есть угол, равный 60° .
2. Произведение всех простых чисел, больших 3 и меньших n , имеет сумму цифр 8. Чему оно может быть равно?
3. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что $AF = FE = BC$ и $BE = CD$. Известно также, что $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Докажите, что $BC + BD > AB$.
4. Натуральные числа раскрашены в два цвета. Докажите, что можно указать цвет и натуральное число n так, чтобы нашлось бесконечно много пар чисел указанного цвета с разностью n .
5. На международную конференцию прибыло по два участника из 27 стран. Можно ли так рассадить всех участников за круглым столом, чтобы между каждыми двумя участниками из одной страны сидело ровно 9 других участников?
6. Есть 100 карточек, у каждой из которых одна сторона черная, а другая — белая. Карточки лежат на столе белой стороной вверх. Костя перевернул 50 карточек, затем Сережа перевернул 60 карточек, а после этого Оля перевернула 70 карточек. В результате все 100 карточек оказались повернуты черной стороной вверх. Сколько карточек могло быть перевернуто три раза?
7. В какое минимальное количество цветов надо покрасить диагонали, стороны и вершины правильного 17-угольника, чтобы отрезки одного цвета не должны имели общих вершин и цвет каждой вершины отличался от цвета исходящих из нее отрезков.
8. В таблице 1000×4 в верхней строке записаны числа 1, 9, 6, 8. Следующая строка заполняется таким образом: в каждую клетку пишется сумма трех чисел предыдущей строки, не стоящих над этой клеткой, уменьшенная на число, стоящее над данной клеткой. Какое число будет стоять в правом нижнем углу таблицы?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2008

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Саша умножил некоторое трехзначное число на его первую цифру, Дима умножил то же самое число на его вторую цифру, Костя — на третью, а Игорь сложил результаты Саши и Кости, после чего вычел результат Димы. Получилось число 4389. Докажите, что кто-то из мальчиков ошибся.

2. В какое минимальное количество цветов надо покрасить диагонали, стороны и вершины правильного 2007-угольника, чтобы выполнялись следующие условия: 1) отрезки одного цвета не должны иметь общих вершин; 2) цвет вершины должен отличаться от цвета исходящих из нее отрезков.

3. В жаркий день четыре семейных пары выпили 44 бутылки кока-колы. Александр выпил 2 бутылки, Борис — 3, Виктор — 4, Григорий — 5. Известно, что супруга Андреева выпила столько же, сколько ее муж, супруга Борисова — вдвое больше мужа, супруга Викторова — втрое, а жена Голованова — вчетверо больше, чем ее муж. Как зовут Голованова?

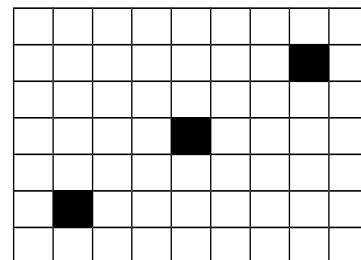
4. В таблице 1000×4 в верхней строке записаны числа 1, 9, 6, 8. Следующая строка заполняется таким образом: в каждую клетку пишется сумма трех чисел предыдущей строки, не стоящих над этой клеткой, уменьшенная на число, стоящее над данной клеткой. Какое число будет стоять в правом нижнем углу таблицы?

5. На конференцию приехали по 2 делегата из 27 стран, всего 54 человека. Можно ли их всех рассадить за круглый стол так, чтобы между представителями одной страны сидело ровно 9 других делегатов?

6. В классе 25 человек, каждый из которых — высокого, среднего или низкого роста. из них 3 двоечника и 5 отличников. Низких в классе 8 человек, высоких — 9, есть двоечники всех размеров, а среди "середняков" (не двоечников и не отличников) 3 ученика среднего роста. Сколько отличников среднего и низкого роста, если самый высокий в классе тоже отличник?

7. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составили все возможные числа, в которых никакие цифры не повторяются и идут в порядке возрастания. Докажите, что из этих чисел нельзя выбрать 33 таких, чтобы у каждых двух чисел нашлась общая цифра.

8. Из прямоугольника 7×9 вырезаны три клеточки, показанные на рисунке. Разрежьте оставшуюся часть на две части, из которых можно сложить прямоугольник 6×10 .



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2008

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Маше сообщили набор из 2008 чисел, и она проделала с ним следующие действия: первое увеличила на треть, второе – на четверть, третье – на пятую часть, ..., предпоследнее – на $1/2009$. Последнее число Маша уменьшила, и в результате всех этих действий у Маши снова получился исходный набор чисел. Во сколько раз Маша уменьшила последнее число?

2. Буратино, Мальвина и Пьеро, спасаясь от Карабаса-Барабаса, прибежали к озеру, где жила черепаха Тортила. Мальвина и Пьеро сели на Тортилу, а Буратино места не хватило, и он бросился вплавь. Буратино может переплыть озеро за 30 минут, а черепаха (с грузом или без него) плавает в три раза быстрее. Карабас-Барабас плавать не умеет, зато бежит в два раза быстрее, чем куклы, и поэтому он побежал вокруг озера. На это у него уходит 30 минут. Смогут ли Буратино и его друзья убежать от Карабаса-Барабаса, если от озера до домика папы Карло им надо бежать еще 18 минут?

3. В какое минимальное количество цветов надо покрасить диагонали, стороны и вершины правильного семиугольника, чтобы выполнялись следующие условия: 1) отрезки одного цвета не должны иметь общих вершин; 2) цвет вершины должен отличаться от цвета исходящих из нее отрезков.

4. В таблице 100×4 в верхней строке записаны числа 1, 2, 3, 4. Следующая строка заполняется таким образом: в каждую клетку пишется сумма трех чисел предыдущей строки, не стоящих над этой клеткой, уменьшенная на число, стоящее над данной клеткой. Какое число будет стоять в правом нижнем углу таблицы?

5. Шестизначное число N , все цифры которого различны, таково, что само оно, и любое число, полученное из него перестановкой цифр, делится на однозначное число M . Каким может быть M ? Найдите все варианты.

6. В классе 25 человек, каждый из которых — высокого, среднего или низкого роста. из них 3 двоечника и 5 отличников. Низких в классе 8 человек, высоких — 9, есть двоечники всех размеров, а среди "середняков" (не двоечников и не отличников) 3 ученика среднего роста. Сколько отличников среднего и низкого роста, если самый высокий в классе тоже отличник?

7. Из цифр 1, 2, 3, 4 составили все возможные числа, в которых никакие цифры не повторяются и идут в порядке возрастания. Докажите, что из этих чисел нельзя выбрать 9 таких, чтобы у каждых двух чисел нашлась общая цифра.

8. Из прямоугольника 7×9 вырезаны три клеточки, показанные на рисунке. Разрежьте оставшуюся часть на две части, из которых можно сложить прямоугольник 6×10 .

