

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В Гардарикии 100 городов, некоторые из которых соединены дорогами (каждые два города может соединять только одна дорога). Маршрут по городам $P_1, P_2, \dots, P_k$ назовём *веерным*, если для каждого i из города P_i выходит ровно i дорог. Какое наибольшее количество городов может быть в веерном маршруте?
2. Найдите все натуральные n , которые можно представить в виде $n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$ с натуральными a, b, c . Здесь $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y .
3. Точка K — середина стороны AD квадрата $ABCD$. Прямая, симметричная CD относительно CK , пересекает сторону AB в точке L . Найдите отношение $AL:LB$.
4. В зале 100 мест, расположенных в виде квадрата 10×10 . Все цены на все места различны. Несколько зрителей сели на эти места, после чего каждый зритель спросил всех своих соседей по стороне или диагонали (всего не более 8 соседей), сколько они заплатили за свои места. Оказалось, что у каждого зрителя имеется не более одного соседа, заплатившего больше него. Какое наибольшее количество зрителей может сидеть в зале?
5. F — середина стороны треугольника, а точки H_1 и H_2 делят другую сторону на три равные части. Третья сторона разбита на n равных частей точками $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$. Рассмотрим все треугольники FH_iN_j , где $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, n-1$. Докажите, что для каждого из этих треугольников среди них найдется еще ровно один треугольник той же площади.
6. Для произвольного натурального числа n обозначим через $S(n)$ последнюю цифру суммы цифр числа n . Является ли последовательность $S(n)$ периодической?
7. Последовательность натуральных чисел такова, что $a_0 = k$, $a_{n+1} = a_n^5 + 487$. Найдите какое-нибудь значение k , при котором в этой последовательности будет наибольшее число точных квадратов.
8. Треугольник разрезан на треугольники так, что вершина одного треугольника не может лежать на стороне другого треугольника. Внутри исходного треугольника оказалось 100 вершин треугольников разбиения. Докажите, что в какой-то из вершин внутри исходного треугольника сходится не более 5 треугольников.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В Гардарикии 100 городов, некоторые из которых соединены дорогами (каждые два города может соединять только одна дорога). Маршрут по городам $P_1, P_2, \dots, P_k$ назовём *веерным*, если для каждого i из города P_i выходит ровно i дорог. Какое наибольшее количество городов может быть в веерном маршруте?
2. Верно ли, что любое натуральное число n , большее 1000000, можно представить в виде $n = [a,b] + [b,c] + [c,a]$ с натуральными a, b, c . Здесь $[x,y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y .
3. Точка K — середина стороны AD квадрата $ABCD$, а точка L на стороне AB такова, что $BL = 3AL$. Докажите, что CK — биссектриса угла DCL .
4. Докажите, что на доску 100×100 нельзя положить по клеточкам 98 доминошек (т.е., 98 прямоугольников 1×2) так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали они занимали нечетное количество клеток. Доминошки могут соприкасаться сторонами, но не должны перекрываться.
5. На стороне AC треугольника ABC нашлись точки K и L , такие что L — середина AK и BK — биссектриса угла LBC . Оказалось, что $BC = 2BL$. Докажите, что $KC = AB$.
6. Для произвольного натурального числа n обозначим через $S(n)$ последнюю цифру суммы цифр числа n . Является ли последовательность $S(n)$ периодической?
7. Последовательность натуральных чисел такова, что $a_0 = k$; $a_{n+1} = a_n^3 + 19$. Найдите значение k , при котором в этой последовательности будет наибольшее число точных квадратов.
8. Вдоль дороги растут 50 дубов. Известно, что высота каждого из них, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического высот своих соседей. Высота первого дуба — 3 метра, а второго — 3,2 метра. Докажите, что высота последнего дуба меньше 13 метров.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Путь $P_1, P_2, \dots, P_k$ в графе без кратных ребер называется *веером*, если для каждого i степень вершины P_i равна i . Какое наибольшее количество вершин может содержать веер в графе на 101 вершине?

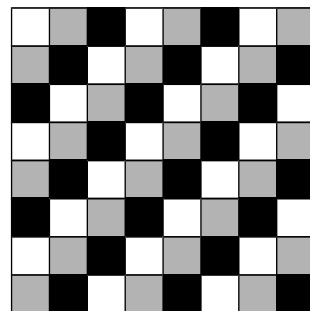
2. Докажите, что существует натуральное число n , большее 1000, которое нельзя представить в виде $n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$ с натуральными a, b, c . Здесь $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y .

3. Точка K — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. На стороне AB отмечена точка L такая, что $\angle LCK = \angle KCD$. Найдите угол LKC .

4. В зале 100 мест, расположенных в виде квадрата 10×10 . Все цены на все места различны. Несколько зрителей сели на эти места, после чего каждый зритель спросил всех своих соседей по стороне или диагонали (всего не более 8 соседей), сколько они заплатили за свои места. Оказалось, что у каждого зрителя имеется не более одного соседа, заплатившего больше него. Какое наибольшее количество зрителей может сидеть в зале?

5. Вдоль дороги растут 50 дубов. Известно, что высота каждого из них, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического высот своих соседей. Высота первого дуба — 3 метра, а второго — 3,2 метра. Докажите, что высота последнего дуба меньше 13 метров.

6. Вася раскрасил клетки доски 8×8 в три цвета, как показано на рисунке. Он хочет расставить на клетках доски 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы все они стояли на клетках одного цвета. Сколькими способами он может это сделать?



7. Петя считает счастливыми некоторые натуральные числа, причем из любых трех чисел $n, 2n$ и $3n$ он считает счастливым ровно одно число. Известно, что 1 для Пети — счастливое число. Считает ли он счастливым число $2^{200} \cdot 3^{300}$?

8. Даны 4 монеты. Каждая из них может быть либо настоящей, либо фальшивой. Вес настоящей монеты 10 грамм, а фальшивой 9. Можно ли за 3 взвешивания на электронных весах, показывающих вес груза, определить, какие монеты настоящие, а какие — фальшивые.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки цифр x, y, z , для которых выполняется равенство

$$\frac{x+y}{z} = \overline{zyx}.$$

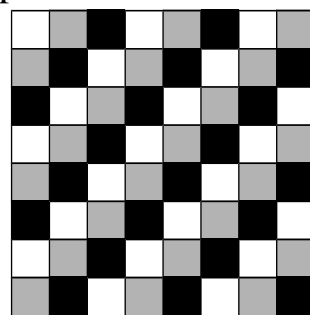
2. Саша и Кирилл задумали два натуральных числа. Саша умножил первое число на сумму цифр второго и получил 20072007200720072007. Кирилл умножил второе число на сумму цифр первого числа и получил 20082008200820082008. Докажите, что кто-то из мальчиков ошибся.

3. Точка K — середина стороны AD квадрата $ABCD$. На стороне AB отмечена точка L такая, что $\angle LCK = \angle KCD$. Найдите угол LKC .

4. Докажите, что на доску 100×100 нельзя положить по клеточкам 98 доминошек (т.е., 98 прямоугольников 1×2) так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали они занимали нечетное количество клеток. Доминошки могут соприкасаться сторонами, но не должны перекрываться.

5. Вдоль дороги растут 50 дубов. Известно, что высота каждого из них, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического высот своих соседей. Высота первого дуба — 3 метра, а второго — 3,2 метра. Докажите, что высота последнего дуба меньше 13 метров.

6. Вася раскрасил клетки доски 8×8 в три цвета как показано на рисунке. Он хочет расставить на клетках доски 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы все они стояли на клетках одного цвета. Сколькими способами он может это сделать?



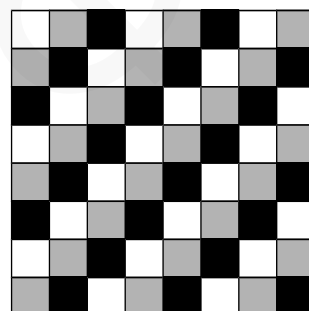
7. Петя считает счастливыми некоторые натуральные числа, причем из любых трех чисел n , $2n$ и $3n$ он считает счастливым ровно одно число. Известно, что 1 для Пети — счастливое число. Считает ли он счастливым число 648?

8. Даны 4 монеты. Каждая из них может быть либо настоящей, либо фальшивой. Вес настоящей монеты 10 грамм, а фальшивой 9. Можно ли за 3 взвешивания на электронных весах, показывающих вес груза, определить, какие монеты настоящие, а какие — фальшивые?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2008**ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Мальчик Коля любит плавать. На реке Вятке он, плывя по течению, проплывает от пляжа до лодочной станции за 18 минут, а обратно – против течения – ровно за 1 час. Когда он приехал на реку Иж, течение в которой немного медленнее, оказалось, что точно такое же расстояние он, плывя по течению, проплывает за 20 минут. Сколько ему времени потребуется, чтобы вернуться обратно?

2. Доску 8×8 раскрасили в три цвета так, как показано на рисунке. Сколькими способами можно поставить на эту доску 8 ладей так, чтобы они не били друг друга, и все ладьи стояли на клетках одного цвета?



3. Петя считает счастливыми некоторые натуральные числа, причем из любых четырех чисел n , $2n$, $3n$ и $5n$ он считает счастливым ровно одно число. Известно, что 1 и 20 для Пети — счастливые числа. Считает ли он счастливым для себя число 25?

4. Найдите все тройки цифр x , y , z , для которых выполняется равенство $\frac{x+y}{z} = \overline{zyx}$.

5. Вдоль аллеи растут 10 деревьев. Высота каждого дерева — целое число метров, причем первое и десятое имеют высоту 1 м. Каждое дерево, кроме первого и последнего, выше, чем среднее арифметическое высот двух соседних с ним деревьев. Докажите, что найдется дерево, растущее на этой аллее и имеющее высоту более 10 метров.

6. Каждая из четырех монет может быть настоящей (весом 10 г) или фальшивой (весом 9 г). Однотарелочные весы точно показывают вес положенных на них монет. Можно ли за три взвешивания на однотарелочных весах заведомо определить все фальшивые монеты?

7. Докажите, что сумма цифр числа, кратного 2008, может принимать любые значения от 10 до 99.

8. На плоскости расположены 20 красных точек и несколько синих. Известно, что на любом отрезке, соединяющем две одноцветные точки, всегда найдется точка другого цвета. Сколько может быть синих точек?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2008

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Мальчик Коля любит плавать. На реке Вятке он, плывя по течению, проплывает от пляжа до лодочной станции за 18 минут, а обратно он плывет ровно 1 час. Когда он приехал на реку Иж, течение в которой немного медленнее, оказалось, что точно такое же расстояние он, плывя по течению, проплывает за 20 минут. Сколько ему времени потребуется, чтобы вернуться обратно?
2. Сколько существует десятизначных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?
3. Петя считает счастливыми некоторые натуральные числа, причем из любых трех чисел n , $2n$ и $3n$ он считает счастливым ровно одно число. Известно, что 1 для Пети – счастливое число. Считает ли он счастливым для себя число 12?
4. Найдите все тройки цифр x , y , z , для которых выполняется равенство $\frac{x+y}{z} = \overline{zx}$.
5. Робину Бобину Барабеку подарили на День Рождения 1254 котлеты. Чтобы продлить удовольствие, он решил есть котлеты следующим образом. В первый день он собирался съесть столько котлет, сколько гостей пришло к нему на День Рождения. Во второй день он собирался съесть котлет в два раза больше, чем в первый (если они останутся). В третий день он собирался съесть котлет в три раза больше, чем во второй день, в четвертый день – в четыре раза больше, чем в третий и так далее до тех пор, пока не кончатся котлеты. Известно, что каждый день он ел котлет столько, сколько запланировал, и при этом котлет хватило на целое число дней. Сколько гостей пришло к Барабеку на День Рождения, и сколько дней Барабек ел котлеты? Найдите все возможные ответы.
6. Малыши Аня, Ваня и Настя изучали алфавит. Оказалось, что из букв, которые знает Аня, Ване известны только «а» и «и», а Насе – только «а» и «л». При этом Аня с Ваней, используя все буквы, которые знают, сумели написать слово «АЛФАВИТ», а Ваня с Настей, опять-таки используя все свои знания, написали слово «ПИЛОТКА». Какие буквы изучил каждый ребенок?
7. Докажите, что существует число, кратное 2008, у которого сумма цифр равна 55.
8. На какое наибольшее число прямоугольников с периметром 12, каждая сторона которых — целое число, можно разрезать квадрат со стороной 10?