МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В последовательности a_1, a_2, ... целых чисел есть бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. Для каждого n числа a_1, a_2, ..., a_n дают попарно различные остатки при делении на n. Сколько раз в последовательности встречается число 2008?

2. За круглым столом сидят 2008 детей, не более 669 из которых — мальчики. Докажите, что найдется девочка, для которой выполнено следующее условие: среди любых нескольких подряд сидящих детей, крайняя из которых — эта девочка, девочек больше половины.

3. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A > 60°$ проведены биссектриса AL, медиана BM и высота CH. Докажите, что $LM+MA > LH+HA$.

4. Число называется прекрасненьким, если оно делится на произведение всех своих ненулевых цифр. Докажите, что 14 прекрасненьких чисел не могут идти подряд.

5. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $\angle DAC = \angle BDC = 36°$, $\angle CBD = 18°$ и $\angle BAC = 72°$, пересекаются в точке P. Найдите $\angle APD$.

6. Целые числа раскрашены в белый и голубой цвета таким образом, что разность двух белых чисел никогда не равна k, а разность двух голубых никогда не равна 1. При каких k такое возможно?

7. Пусть $n > 1$ — натуральное число, $a > b > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\ldots+\frac{1}{a+nb}<\frac{n+1}{a+\frac{b}{2}}.$$

8. На шахматной доске 8×8 расставлено несколько фишек. Докажите, что можно выбрать 4 строки и 4 столбца таким образом, чтобы число фишек, стоящих на 16 клетках, образующихся при их пересечениях, делилось на 4.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдутся ли такие различные вещественные числа a, b, c, что прямые $y = ax+b$, $y = bx+c$, $y = cx+a$ пересекаются в одной точке?

2. На длинной полоске бумаги напечатана десятичная запись числа $3^{20072008}$. Саша разрезал полоску на три куска. Изучив числа, написанные на этих кусках, Саша заявил, что каждое из этих трех чисел является степенью тройки. Докажите, что он ошибается.

3. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A > 60°$ проведены биссектриса AL, медиана BM и высота CH. Докажите, что $LM+MA > LH+HA$.

4. Число называется прекрасненьким, если оно делится на произведение всех своих ненулевых цифр. Докажите, что 14 прекрасненьких чисел не могут идти подряд.

5. Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике сумма длин биссектрисы и высоты, проведенных из вершины прямого угла, не превосходит длины гипотенузы этого треугольника.

6. Целые числа раскрашены в белый и голубой цвета таким образом, что разность двух белых чисел никогда не равна k, а разность двух голубых никогда не равна 1. При каких k такое возможно?

7. Пусть $n > 1$ — натуральное число, $a > b > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\mathrm{K}+\frac{1}{a+nb}<\frac{n+1}{a+\frac{b}{2}}.$$

8. На шахматной доске 8×8 расставлено несколько фишек. Докажите, что можно выбрать две строки и два столбца таким образом, чтобы на четырех клетках, лежащих в их пересечении, стояло четное число фишек.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Последовательность a_1, a_2, ..., a_{10000} такова, что для каждого натурального $n \le 10000$ числа a_1, a_2, ..., a_n дают попарно различные остатки от деления на n. В этой последовательности встречается и число 2008, и число –2008. Сколько раз в ней встречается число 2007?

2. За круглым столом сидят 2008 детей, не более 669 из которых — мальчики. Докажите, что найдется девочка, для которой выполнено следующее условие: среди любых нескольких подряд сидящих детей, крайняя из которых — эта девочка, девочек больше половины.

3. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A = 60°$ проведены биссектриса AL, медиана BM и высота CH. Докажите, что $LM = LH$.

4. Число называется прекрасненьким, если оно делится на произведение всех своих ненулевых цифр. Докажите, что 14 прекрасненьких чисел не могут идти подряд.

5. Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике сумма длин биссектрисы и высоты, проведенных из вершины прямого угла, не превосходит длины гипотенузы этого треугольника.

6. Целые числа раскрашены в белый и голубой цвета таким образом, что разность двух белых чисел никогда не равна k, а разность двух голубых никогда не равна 1. При каких k такое возможно?

7. Найдите все пары различных целых чисел a, b такие, что $(a^2+1)(b-1) = (b^2+1)(a-1)$.

8. На шахматной доске 8×8 расставлено несколько фишек. Докажите, что можно выбрать 4 строки и 4 столбца таким образом, чтобы число фишек, стоящих на 16 клетках, образующихся при их пересечениях, делилось на 4.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Числа от 1 до 600 выписаны в строчку в некотором порядке. Сумма любых двух соседних чисел не превосходит 800. Докажите, что сумма каких-то двух чисел, стоящих через одно, больше 800.

2. На длинной полоске бумаги напечатана десятичная запись числа $3^{20072008}$. Саша разрезал полоску на три куска. Изучив числа, написанные на этих кусках, Саша заявил, что каждое из этих трех чисел является степенью тройки. Докажите, что он ошибается.

3. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A = 60°$ проведены биссектриса AL, медиана BM и высота CH. Докажите, что $LM = LH$.

4. Число называется прекрасненьким, если оно делится на произведение всех своих ненулевых цифр. Докажите, что 14 прекрасненьких чисел не могут идти подряд.

5. Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике сумма длин биссектрисы и высоты, проведенных из вершины прямого угла, не превосходит длины гипотенузы этого треугольника.

6. Вдоль дороги длиной 58 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый велосипедист едет по дороге со скоростью 15 км/ч. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Второй велосипедист едет со скоростью 20 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого велосипедиста. Выехали и приехали они одновременно. Сколько пеньков могло быть на дороге?

7. Найдите все пары различных целых чисел a, b такие, что $(a^2+1)(b-1) = (b^2+1)(a-1)$.

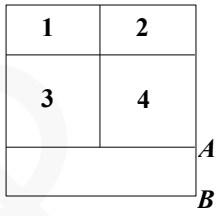
8. На шахматной доске 8×8 расставлено несколько фишек. Докажите, что можно выбрать две строки и два столбца таким образом, чтобы на четырех клетках, лежащих в их пересечении, стояло четное число фишек.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2008

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Числа от 1 до 60 выписаны в строчку в некотором порядке. Сумма любых двух соседних чисел не превосходит 80. Докажите, что сумма каких-то двух чисел, стоящих через одно, больше 80.

2. Квадрат разделили прямолинейными разрезами, как показано на рисунке. Оказалось, что часть 3 — квадрат, периметр части 1 равен 14 см, и $AB = 3$ см. Найдите сторону исходного квадрата.



3. Операция ** задана правилом: $x{**}y = x^2 + y^3$. Найдите хотя бы одну четверку натуральных чисел a, b, c, d, для которой $(a{**}b){**}(c{**}d)=297$.

4. Можно ли раскрасить целые числа в белый и голубой цвета так, что разность двух белых чисел никогда не равна 2008, а разность двух голубых никогда не равна 1?

5. Число называется прекрасненьким, если оно делится на произведение всех своих ненулевых цифр. Докажите, что 14 прекрасненьких чисел не могут идти подряд.

6. Вдоль дороги длиной 58 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый велосипедист едет по дороге со скоростью 15 км/ч. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Второй велосипедист едет со скоростью 20 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого велосипедиста. Выехали и приехали они одновременно. Сколько пеньков могло быть на дороге?

7. Имеется куб с ребром 3 см. Хулиган Вася выкрасил некоторые грани куба (не менее одной) в красный цвет, а затем распилил куб на маленькие кубики с ребром 1 см. Какое количество кубиков, у которых не окрашена ни одна грань, могло при этом получиться?

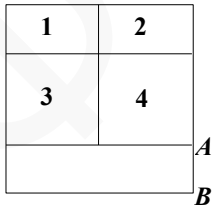
8. На шахматной доске 8×8 расставлено несколько фишек. Докажите, что можно выбрать две строки и два столбца таким образом, чтобы на четырех клетках, лежащих в их пересечении, стояло четное число фишек.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2008

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На карте страны, в которой ровно 6 областей, причем первая область граничит ровно с одной другой областью, вторая – ровно с двумя, третья — ровно с тремя, четвертая — ровно с четырьмя, пятая — ровно с пятью. Со сколькими областями может граничить шестая область? Нарисуйте хотя бы одну из возможных карт.

2. Квадрат разделили прямолинейными разрезами, как показано на рисунке. Оказалось, что части 3 и 4 — квадраты, периметр части 1 равен 14 см, и $AB = 3$ см. Найдите сторону исходного квадрата.



3. Операция ** задана правилом: $x{**}y = x^2 + 8y$. Найдите хотя бы одну четверку натуральных чисел a, b, c, d, для которой $(a{**}b){**}(c{**}d)=217$.

4. Можно ли расставить на шахматной доске 6 коней так, чтобы они вместе держали под боем (контролировали) не более 12 полей доски?

5. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что число $99n$ записывается с помощью одних единиц.

6. Имеется куб с ребром 3 см. Хулиган Вася выкрасил некоторые грани куба (не менее одной) в красный цвет, а затем распилил куб на маленькие кубики с ребром 1 см. Могло ли при этом получиться 6 кубиков, у которых не окрашена ни одна грань?

7. Вдоль дороги длиной 37 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый велосипедист едет по дороге со скоростью 15 км/ч. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Второй велосипедист едет со скоростью 20 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого велосипедиста. Выехали и приехали они одновременно. Сколько пеньков могло быть на дороге?

8. На шахматной доске 3×3 расставлено несколько фишек. Докажите, что можно выбрать две строки и два столбца таким образом, чтобы на четырех клетках, лежащих в их пересечении, стояло четное число фишек.