XXXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2008

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

**1.** Собрались несколько рыцарей и лжецов, все разного роста (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый заявил: «Среди тех, кто выше меня, есть лжецы». Сколько лжецов могло быть среди них?

**2.** У Кощея есть семечко. Если его полить мёртвой водой, из него начинает расти дерево со скоростью 1 м/час. Если это дерево полить живой водой, оно начинает расти со скоростью 2 м/час. Кощей сделал на стене отметку на высоте между 1 и 2 метрами от земли, дал Ивану-царевичу семечко, фляги с живой и мёртвой водой и сказал: «Посади семечко в 10 утра, и чтобы к 11 утра дерево доросло точно до моей отметки». Есть ли у Ивана возможность справиться с заданием Кощея?

**3.** Найдите такие четыре различные несократимые дроби, что знаменатель каждой из них больше 20, а знаменатель любой суммы двух, трёх или четырёх этих дробей после сокращения становится меньше 20.

**4.** Найдите наименьшее целое число $k$ такое, что из квадрата со стороной $k$ можно одновременно вырезать квадраты со сторонами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

**5.** На доске написано число 1000000000. Двое играют в такую игру: своим ходом можно либо разложить любое число на два больших единицы сомножителя и выписать их на доску, стерев с доски исходное, либо найти на доске два совпадающих числа и стереть с доски одно из них или оба. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

# ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

**1.** 2008 человек выстроились в шеренгу. Каждый из них — рыцарь или лжец (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый заявил: «Слева от меня есть рыцарь». Сколько рыцарей могло быть в шеренге?

**2.** Найдите такие четыре различные несократимые дроби, что знаменатель каждой из них больше 20, а знаменатель любой суммы двух, трёх или четырёх этих дробей после сокращения становится меньше 20.

**3.** Найдите все натуральные числа, большие 10, обладающие следующим свойством: если у квадрата этого числа поменять местами 2 последние цифры, то получится квадрат следующего за ним числа.

**4.** В треугольнике $ABC$ на сторонах $AB$ и $BC$ выбраны точки $P$ и $Q$. Биссектрисы углов $APQ$ и $PQC$ пересекаются в точке $K$ внутри треугольника. Оказалось, что $KA < KP < KQ < KC$. Докажите, что $AB < BC$.

**5.** На доске написано число $10^{2008}$. Двое играют в такую игру: своим ходом можно либо разложить любое число на два больших единицы сомножителя и выписать их на доску, стерев с доски исходное, либо найти на доске два совпадающих числа и стереть с доски одно из них или оба. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

**1.** 2008 человек выстроились в шеренгу. Каждый из них — рыцарь или лжец (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый, кроме двух крайних, заявил: «И слева и справа от меня есть рыцари». Сколько рыцарей могло быть в шеренге?

**2.** Найдите все натуральные числа, большие 10, обладающие следующим свойством: если у квадрата этого числа поменять местами 2 последние цифры, то получится квадрат следующего за ним числа.

**3.** В треугольнике $ABC$ на сторонах $AB$ и $BC$ выбраны точки $P$ и $Q$. Биссектрисы углов $APQ$ и $PQC$ пересекаются в точке K внутри треугольника. Оказалось, что $KA < KP < KQ < KC$. Докажите, что $AB < BC$.

**4.** На доске написано число $10^{2008}$. Двое играют в такую игру: своим ходом можно либо разложить любое число на два больших единицы сомножителя и выписать их на доску, стерев с доски исходное, либо найти на доске два совпадающих числа и стереть с доски одно из них или оба. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

**5.** Даны положительные числа $a$, $b$, $c$. Докажите, что

$$\frac{a}{b^3c}+\frac{b}{c^3a}+\frac{c}{a^3b} \geq \frac{2}{b^2+c^4}+\frac{2}{c^2+a^4}+\frac{2}{a^2+b^4}.$$

## Решения задач личной олимпиады 6 класса

**Задача 1.** *Собрались несколько рыцарей и лжецов, все разного роста (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый заявил: «Среди тех, кто выше меня, есть лжецы». Сколько лжецов могло быть среди них?*

Ответ: 1. Решение. Самый высокий заведомо лжёт. Поэтому все остальные говорят правду.

**Задача 2.** *У Кощея есть семечко. Если его полить мёртвой водой, из него начинает расти дерево со скоростью 1 м/час. Если это дерево полить живой водой, оно начинает расти со скоростью 2 м/час. Кощей сделал на стене отметку на высоте между 1 и 2 метрами от земли, дал Ивану-царевичу семечко, фляги с живой и мёртвой водой и сказал: «Посади семечко в 10 утра, и чтобы к 11 утра дерево доросло точно до моей отметки». Есть ли у Ивана возможность справиться с заданием Кощея?*

Ответ: Да. Решение. Пусть Кощей отметил точку $A$. Проведём из неё вертикальный отрезок до земли и отметим на нём точку $B$ на расстоянии 1 м от земли и такую точку $C$, что $BC = AB$. В 10 утра Иван посадит семечко и польёт его мёртвой водой, а когда дерево дорастёт до отметки $C$, польёт его живой водой. Без живой воды дерево к 11 утра доросло бы до точки $B$, а с нею, растя вдвое быстрее, оно дорастёт как раз до точки $A$.

**Задача 3.** *Найдите такие четыре различные несократимые дроби, что знаменатель каждой из них больше 20, а знаменатель любой суммы двух, трёх или четырёх этих дробей после сокращения становится меньше 20.*

Решение. Подходят, например, дроби 1/24, 25/24, 49/24, 73/24 или 1/24, 7/24, 13/24, 19/24.

**Задача 4.** *Найдите наименьшее целое число k такое, что из квадрата со стороной k можно одновременно вырезать квадраты со сторонами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.*

Ответ: 13. Решение. Если вырезать квадрат со стороной 7 из квадрата, сторона $k$ которого меньше 13, ширина любой из оставшихся полосок будет не больше $k–7 < 6$. Поэтому $k \geq 13$.

**Задача 5.** *На доске написано число 1000000000. Двое играют в такую игру: своим ходом можно либо разложить любое число на два больших единицы сомножителя и выписать их на доску, стерев с доски исходное, либо найти на доске два совпадающих числа и стереть с доски одно из них или оба. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?*

Решение. Тот, кто ходит первым. Решение. Первым ходом первый раскладывает 1000000000 на 512 (произведение девяти двоек) и 1953125 (произведение девяти пятерок), а затем любую операцию, проделанную вторым над одним из этих чисел или его «потомками», дублирует на втором числе или его «потомках». Это возможно, поскольку «потомки» произведения 9 двоек и произведения 9 пятёрок не взаимодействуют между собой.

## Решения задач личной олимпиады 7 класса

**Задача 1.** *2008 человек выстроились в шеренгу. Каждый из них — рыцарь или лжец (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый заявил: «Слева от меня есть рыцарь». Сколько рыцарей могло быть в шеренге?*

Ответ: Ни одного. Решение. Крайний слева очевидно лжёт. Но тогда лжёт и его правый сосед. Следовательно, лжёт и правый сосед этого соседа. Продолжая это рассуждение, убеждаемся, что все в шеренге — лжецы.

**Задача 2.** *Найдите такие четыре различные несократимые дроби, что знаменатель каждой из них больше 20, а знаменатель любой суммы двух, трёх или четырёх этих дробей после сокращения становится меньше 20.*

Решение. Подходят, например, дроби 1/24, 25/24, 49/24, 73/24 или 1/24, 7/24, 13/24, 19/24.

**Задача 3.** *Найдите все натуральные числа, большие 10, обладающие следующим свойством: если у квадрата этого числа поменять местами 2 последние цифры, то получится квадрат следующего за ним числа.*

Ответ: 13. Решение. Поскольку $(n+1)^2-n^2 = 2n+1$ должно быть меньше 100, $n$ меньше 50. Кроме того, у чисел $n^2$ и $(n+1)^2$ одинаковые суммы цифр, а, стало быть, и остатки от деления на 9. Поэтому $2n+1$ делится на 9. Обоим указанным условиям удовлетворяют только числа 4, 13, 22, 31, 40, 49. Перебирая их, находим, что условию задачи удовлетворяет только число 13.

**Задача 4.** *В треугольнике $ABC$ на сторонах $AB$ и $BC$ выбраны точки $P$ и $Q$. Биссектрисы углов $APQ$ и $PQC$ пересекаются в точке $K$ внутри треугольника. Оказалось, что $KA < KP < KQ < KC$. Докажите, что $AB < BC$.*

Решение. Поскольку напротив большей стороны в треугольнике лежит больший угол, $\angle KAP > \angle KPA = \angle KPQ > \angle KQP = \angle KQC > \angle KCQ$. Кроме того, $\angle KAC > \angle KCA$, откуда $\angle BAC > \angle BCA$ и $BC > AB$.

**Задача 5.** *На доске написано число $10^{2008}$. Двое играют в такую игру: своим ходом можно либо разложить любое число на два больших единицы сомножителя и выписать их на доску, стерев с доски исходное, либо найти на доске два совпадающих числа и стереть с доски одно из них или оба. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ: Тот, кто ходит первым. Решение. Первым ходом первый раскладывает $10^{2008}$ на $2^{2008}$ и $5^{2008}$, а затем любую операцию, проделанную вторым над одним из этих чисел или его «потомками», дублирует на втором числе или его «потомках». Это возможно, поскольку «потомки» степеней двойки и пятёрки не взаимодействуют между собой.

XXXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2008

## Решения задач личной олимпиады 8 класса

**Задача 1.** *2008 человек выстроились в шеренгу. Каждый из них — рыцарь или лжец (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый, кроме двух крайних, заявил: «И слева и справа от меня есть рыцари». Сколько рыцарей могло быть в шеренге?*

Ответ: 0, 1 или 2008. Решение. Пусть крайний слева — лжец. Тогда и все остальные, кроме, быть может, крайнего справа — лжецы, то есть рыцарей 0 или 1. То же будет, если лжец — крайний справа. Если же оба крайних — рыцари, то все, кто между ними, говорят правду, и рыцарей 2008.

**Задача 2.** *Найдите все натуральные числа, большие 10, обладающие следующим свойством: если у квадрата этого числа поменять местами 2 последние цифры, то получится квадрат следующего за ним числа.*

Ответ: 13. Решение. Поскольку $(n+1)^2-n^2 = 2n+1$ должно быть меньше 100, $n$ меньше 50. Кроме того, у чисел $n^2$ и $(n+1)^2$ одинаковые суммы цифр, а, стало быть, и остатки от деления на 9. Поэтому $2n+1$ делится на 9. Обоим указанным условиям удовлетворяют только числа 4, 13, 22, 31, 40, 49. Перебирая их, находим, что условию задачи удовлетворяет только число 13.

**Задача 3.** *В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки P и Q. Биссектрисы углов APQ и PQC пересекаются в точке K внутри треугольника. Оказалось, что KA < KP < KQ < KC. Докажите, что AB < BC.*

Решение. Поскольку напротив большей стороны в треугольнике лежит больший угол, $\angle KAP > \angle KPA = \angle KPQ > \angle KQP = \angle KQC > \angle KCQ$. Кроме того, $\angle KAC > \angle KCA$, откуда $\angle BAC > \angle BCA$ и $BC > AB$.

**Задача 4.** *На доске написано число $10^{2008}$. Двое играют в такую игру: своим ходом можно либо разложить любое число на два больших единицы сомножителя и выписать их на доску, стерев с доски исходное, либо найти на доске два совпадающих числа и стереть с доски одно из них или оба. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ: Тот, кто ходит первым. Решение. Первым ходом первый раскладывает $10^{2008}$ на $2^{2008}$ и $5^{2008}$, а затем любую операцию, проделанную вторым над одним из этих чисел или его «потомками», дублирует на втором числе или его «потомках». Это возможно, поскольку «потомки» степеней двойки и пятёрки не взаимодействуют между собой.

**Задача 5.** *Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что*

$$\frac{a}{b^3c}+\frac{b}{c^3a}+\frac{c}{a^3b} \ge \frac{2}{b^2+c^4}+\frac{2}{c^2+a^4}+\frac{2}{a^2+b^4}.$$

Решение. Применим к каждым двум слагаемым левой части неравенство $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$. Сложив полученные неравенства ($\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b^3c}+\frac{b}{c^3a}\right) \ge \frac{1}{bc^2}$ и два аналогичных), мы получим $\frac{a}{b^3c}+\frac{b}{c^3a}+\frac{c}{a^3b} \ge \frac{1}{bc^2}+\frac{1}{ca^2}+\frac{1}{ab^2}$. Осталось применить неравенство $\frac{1}{xy} \ge \frac{2}{x^2+y^2}$ (следующее из небезызвестного неравенства $x^2+y^2 \ge 2xy$) к парам $b$ и $c^2$, $c$ и $a^2$, $a$ и $b^2$, а полученные неравенства сложить: $\frac{1}{bc^2}+\frac{1}{ca^2}+\frac{1}{ab^2} \ge \frac{2}{b^2+c^4}+\frac{2}{c^2+a^4}+\frac{2}{a^2+b^4}$.