КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. На бирже Цветочного города 1 лимон и 1 банан можно обменять на 2 апельсина и 23 вишни, а 3 лимона — на 2 банана, 2 апельсина и 14 вишен. Что дороже: лимон или банан?

2. 100 конфет были разложены по нескольким кучкам. Пришел хулиган Вася и переложил некоторые конфеты в другие кучки. Он говорит, что после этого в каждой кучке количество конфет либо увеличилось, либо уменьшилось ровно вдвое. Может ли это быть правдой?

3. Найдите все делящиеся на 37 пятизначные числа, у которых первая, третья и пятая цифры одинаковы.

4. Прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника. Докажите, что у каких-то двух из этих четырёх прямоугольников есть общая сторона.

5. 17 чисел написаны по окружности. Могло ли так случиться, что если большее из двух соседних чисел разделить на меньшее, то всегда будет получаться простое число?

6. 12 шахматистов сыграли однокруговой турнир (каждый сыграл с каждым по одному разу). Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?

XXXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2008

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. На бирже Цветочного города 1 лимон и 1 банан можно обменять на 2 апельсина и 23 вишни, а 3 лимона — на 2 банана, 2 апельсина и 14 вишен. Что дороже: лимон или банан?

2. 100 конфет были разложены по нескольким кучкам. Пришел хулиган Вася и переложил некоторые конфеты в другие кучки. Он говорит, что после этого в каждой кучке количество конфет либо увеличилось, либо уменьшилось ровно вдвое. Может ли это быть правдой?

3. Найдите все делящиеся на 37 пятизначные числа, у которых первая, третья и пятая цифры одинаковы.

4. Прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника. Докажите, что у каких-то двух из этих четырёх прямоугольников есть общая сторона.

5. 17 чисел написаны по окружности. Могло ли так случиться, что если большее из двух соседних чисел разделить на меньшее, то всегда будет получаться простое число?

6. 12 шахматистов сыграли однокруговой турнир (каждый сыграл с каждым по одному разу). Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. 100 конфет были разложены по нескольким кучкам. Пришел хулиган Вася и переложил некоторые конфеты в другие кучки. Он говорит, что после этого в каждой кучке количество конфет либо увеличилось, либо уменьшилось ровно вдвое. Может ли это быть правдой?

2. Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа, не превосходящие $50n$. Затем с доски стерли все числа, делящиеся на 50. Докажите, что сумма оставшихся чисел будет квадратом натурального числа.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения: $\angle DAB = \angle ABC = 60°$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AD+CB = AB$.

4. 12 шахматистов сыграли однокруговой турнир (каждый сыграл с каждым по одному разу). Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?

5. Клетки таблицы $n\times n$ раскрашены в белый и черный цвета так, что из четырёх угловых клеток таблицы три — белые и одна — черная. Докажите, что в таблице есть квадрат 2×2, в котором нечетное число белых клеток.

6. На плоскости дано 13 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее 130 неравнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.

7. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $n^8 - p^5 = n^2 + p^2$.

XXXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2008

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. 100 конфет были разложены по нескольким кучкам. Пришел хулиган Вася и переложил некоторые конфеты в другие кучки. Он говорит, что после этого в каждой кучке количество конфет либо увеличилось, либо уменьшилось ровно вдвое. Может ли это быть правдой?

2. Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа, не превосходящие $50n$. Затем с доски стерли все числа, делящиеся на 50. Докажите, что сумма оставшихся чисел будет квадратом натурального числа.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения: $\angle DAB = \angle ABC = 60°$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AD+CB = AB$.

4. 12 шахматистов сыграли однокруговой турнир (каждый сыграл с каждым по одному разу). Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?

5. Клетки таблицы $n\times n$ раскрашены в белый и черный цвета так, что из четырёх угловых клеток таблицы три — белые и одна — черная. Докажите, что в таблице есть квадрат 2×2, в котором нечетное число белых клеток.

6. На плоскости дано 13 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее 130 неравнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.

7. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $n^8 - p^5 = n^2 + p^2$.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа, не превосходящие $50n$. Затем с доски стерли все числа, делящиеся на 50. Докажите, что сумма оставшихся чисел будет квадратом натурального числа.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения: $\angle DAB = \angle ABC = 60°$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AD+CB = AB$.

3. 12 шахматистов сыграли однокруговой турнир (каждый сыграл с каждым по одному разу). Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?

4. На плоскости дано 50 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Каждую из этих точек окрасили в один из четырех цветов. Докажите, что можно выбрать цвет таким образом, что найдется не менее 130 неравнобедренных треугольников с вершинами этого цвета.

5. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — периодическая последовательность цифр (то есть существует такое T, что для всех n, начиная с некоторого, $a_n = a_{n+T}$). Докажите, что если из этой последовательности вычеркнуть все цифры, стоящие на местах с номерами, кратными данному k, полученная последовательность цифр тоже будет периодической.

6. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $n^8 - p^5 = n^2 + p^2$.

7. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка P. Прямые, проходящие через P параллельно AB и BC, пересекают стороны BC и AB в точках X и Y. Оказалось, что отрезок XY перпендикулярен медиане BM треугольника. Докажите, что если изменить положение точки P, то отрезок XY удлинится.

XXXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2008

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2008

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа, не превосходящие $50n$. Затем с доски стерли все числа, делящиеся на 50. Докажите, что сумма оставшихся чисел будет квадратом натурального числа.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения: $\angle DAB = \angle ABC = 60°$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AD+CB = AB$.

3. 12 шахматистов сыграли однокруговой турнир (каждый сыграл с каждым по одному разу). Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?

4. На плоскости дано 50 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Каждую из этих точек окрасили в один из четырех цветов. Докажите, что можно выбрать цвет таким образом, что найдется не менее 130 неравнобедренных треугольников с вершинами этого цвета.

5. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — периодическая последовательность цифр (то есть существует такое T, что для всех n, начиная с некоторого, $a_n = a_{n+T}$). Докажите, что если из этой последовательности вычеркнуть все цифры, стоящие на местах с номерами, кратными данному k, полученная последовательность цифр тоже будет периодической.

6. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $n^8 - p^5 = n^2 + p^2$.

7. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка P. Прямые, проходящие через P параллельно AB и BC, пересекают стороны BC и AB в точках X и Y. Оказалось, что отрезок XY перпендикулярен медиане BM треугольника. Докажите, что если изменить положение точки P, то отрезок XY удлинится.

XXXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2007

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ»

Задача 1. *На бирже Цветочного города 1 лимон и 1 банан можно обменять на 2 апельсина и 23 вишни, а 3 лимона — на 2 банана, 2 апельсина и 14 вишен. Что дороже: лимон или банан?*

Ответ: Лимон. Решение. Из условия следует, что 5 лимонов = 2 лимона + 3 лимона = 2 лимона + 2 банана + 2 апельсина + 14 вишен = 2×(2 апельсина + 23 вишни) + 2 апельсина + 14 вишен = 6 апельсинов + 60 вишен. Значит, 1 лимон = 6/5 апельсина + 12 вишен, а 1 банан = 2 апельсина + 23 вишни – (6/5 апельсина + 12 вишен) = 4/5 апельсина + 11 вишен. Понятно, что 6/5 апельсина + 12 вишен больше, чем 4/5 апельсина + 11 вишен.

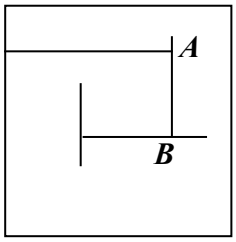
Задача 2. *100 конфет были разложены по нескольким кучкам. Пришел хулиган Вася и переложил некоторые конфеты в другие кучки. Он говорит, что после этого в каждой кучке количество конфет либо увеличилось, либо уменьшилось ровно вдвое. Может ли это быть правдой?*

Ответ: Нет. Решение. Обозначим через a количество конфет, лежащих в кучках, где их число удвоилось. Тогда, в оставшихся кучках $100–a$ конфет. По условию, $2a+(100–a)/2 = 100$. Отсюда, $3a = 100$, что невозможно.

Задача 3. *Найдите все делящиеся на 37 пятизначные числа, у которых первая, третья и пятая цифры одинаковы.*

Ответ: Все числа вида: X0X0X, X4X7X и X7X3X, где X — произвольная цифра. Решение. Заметим, что число 10101 делится на 37, поэтому $1000a+10b$ должно делиться на 37 (a — количество тысяч, а b — количество десятков в пятизначном числе). Это равносильно делимости на 37 числа $100a+b$ или $26a+b$. Подставляя вместо a всевозможные значения от 0 до 9, находим соответствующие b. В диапазоне от 0 до 9 получаются три значения: $a = b = 0$, $a = 4$, $b = 7$, $a = 7$, $b = 3$.

Задача 4. *Прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника. Докажите, что у каких-то двух из этих четырёх прямоугольников есть общая сторона.*



Решение. Допустим, что в прямоугольнике есть сквозной разрез от края и до края. Тогда оставшийся прямоугольник либо состоит из двух, имеющих общую сторону, либо из трех. В этой ситуации два из углов принадлежат одному прямоугольнику, поэтому обязательно есть сквозной разрез, и оставшаяся часть состоит из двух прямоугольников, имеющих общую сторону. Пусть сквозного разреза нет. Тогда разрез идет от стороны и прерывается в т. A на другом разрезе (см. рис.), который, в свою очередь, должен заканчиваться в т. B на еще одной линии, которая ниже первой. Эта линия заканчивается на еще одной линии, которая левее проходящей через т. A. Но тогда образуются части минимум 5 прямоугольников, что противоречит условию.

Задача 5. *17 чисел написаны по окружности. Могло ли так случиться, что если большее из двух соседних чисел разделить на меньшее, то всегда будет получаться простое число?*

Ответ: Нет. Решение. Разложим все числа на простые сомножители. Поскольку соседние числа должны отличаться ровно одним сомножителем, сумма степеней простых сомножителей у соседних чисел имеет разную четность. Таким образом, числа с чётными и нечётными суммами степеней простых сомножителей должны чередоваться. Но нечётное количество чисел так расположить невозможно.

Задача 6. *12 шахматистов сыграли однокруговой турнир. Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?*

Ответ: Победил занявший четвертое место. Решение. Заметим, что в каждой партии разыгрывается одно очко. Поэтому уже в играх между собой шахматисты, занявшие последние 5 мест, вместе набрали не меньше очков, чем было сыграно между ними партий, то есть $5×4/2 = 10$. Итак, второй призер набрал не менее 10 очков. Очевидно, больше 10 очков он также не мог набрать — ведь если он набрал хотя бы 10,5 очков, то он никому не проиграл, а победитель набрал 11 очков и у всех выиграл. Поэтому второй призер набрал ровно 10 очков, и столько же очков набрали вместе игроки, занявшие последние 5 мест. Поскольку как раз 10 очков они набрали в играх между собой, всем остальным участникам они только проигрывали. В частности, шахматист, занявший восьмое место, проиграл занявшему четвертое.

XXXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2007

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ МЛАДШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *100 конфет были разложены по нескольким кучкам. Пришел хулиган Вася и переложил некоторые конфеты в другие кучки. Он говорит, что после этого в каждой кучке количество конфет либо увеличилось, либо уменьшилось ровно вдвое. Может ли это быть правдой?*

Ответ: Нет. Решение. Обозначим через a количество конфет, лежащих в кучках, где их число удвоилось. Тогда, в оставшихся кучках $100–a$ конфет. По условию, $2a+(100–a)/2 = 100$. Отсюда, $3a = 100$, что невозможно.

Задача 2. *Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа, не превосходящие 50n. Затем с доски стерли все числа, делящиеся на 50. Докажите, что сумма оставшихся чисел будет квадратом натурального числа.*

Решение. Искомая сумма равна $1+\ldots+50n–50(1+\ldots+n) = 50n(50n+1)/2–50n(n+1)/2 = 25\cdot 49\cdot n^2$.

Задача 3. *В выпуклом четырехугольнике ABCD выполнены соотношения: $\angle DAB = \angle ABC = 60°$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AD+CB = AB$.*

Решение. Продлим стороны AD и BC до пересечения в точке K. Тогда треугольник AKB будет равносторонним. Следовательно, треугольники ABC и BKD равны по стороне и двум углам, поэтому $BC = KD$, откуда $AB = AK = AD+DK = AD+BC$.

Задача 4. *12 шахматистов сыграли однокруговой турнир. Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?*

Ответ: Победил занявший четвертое место. Решение. Заметим, что в каждой партии разыгрывается одно очко. Поэтому уже в играх между собой шахматисты, занявшие последние 5 мест, вместе набрали не меньше очков, чем было сыграно между ними партий, то есть $5\times 4/2 = 10$. Итак, второй призер набрал не менее 10 очков. Очевидно, больше 10 очков он также не мог набрать — ведь если он набрал хотя бы 10,5 очков, то он никому не проиграл, а победитель набрал 11 очков и у всех выиграл. Поэтому второй призер набрал ровно 10 очков, и столько же очков набрали вместе игроки, занявшие последние 5 мест. Поскольку как раз 10 очков они набрали в играх между собой, всем остальным участникам они только проигрывали. В частности, шахматист, занявший восьмое место, проиграл занявшему четвертое.

Задача 5. *Клетки таблицы $n\times n$ раскрашены в белый и черный цвета так, что из четырёх угловых клеток таблицы три — белые и одна — черная Докажите, что в таблице есть квадрат 2×2, в котором нечетное число белых клеток.*

Решение. Рассмотрим сумму количеств белых клеток по всем квадратам 2×2. Заметим, что каждая белая клетка, кроме угловых, входит в четное число квадратов 2×2 (клетка примыкающая к стороне исходного квадрата в 2, а не примыкающая ни к одной из сторон — в 4) и учитывается в нашей сумме четное число раз. А каждая из белых угловых клеток учитывается один раз. Таким образом наша сумма нечетна, следовательно, нечетно как минимум одно из слагаемых. Тогда нам подходит квадрат 2×2, соответствующий нечетному слагаемому.

Задача 6. *На плоскости дано 13 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее 130 неравнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.*

Решение. Подсчитаем наибольшее возможное количество равнобедренных треугольников с вершинами в наших точках. Рассмотрим любой отрезок AB между двумя из наших точек. Как известно, вершина равнобедренного треугольника с основанием AB должна лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Поскольку на этом серединном перпендикуляре по условию лежит не более двух наших точек, то существует не более двух равнобедренных треугольников с основанием AB. Всего есть 78 способов выбрать пару точек из 13, следовательно, общее количество равнобедренных треугольников не превосходит $78\cdot 2 = 13\cdot 12$. Так как общее количество треугольников на 13 вершинах равно $13\cdot 12\cdot 11/6 = 13\cdot 22$, то количество неравнобедренных треугольников не меньше, чем 130.

Задача 7. *Найдите все натуральные n и простые p такие, что* $n^8 - p^5 = n^2 + p^2$.

Ответ: $n = 2$, $p = 3$. Решение. Перепишем равенство в виде $n^8-n^2 = p^5+p^2$. Левая часть полученного уравнения равна $n^2(n^6-1)$ и увеличивается с ростом n, а правая увеличивается с ростом p. Поскольку $2^8-2^2 = 252 = 3^5+3^2 > 2^5+2^2$, нам достаточно разобрать случай $p > 3$. При этом, очевидно, $n > 2$ и поэтому $n^6 < n^8-n^2 = p^5+p^2 < p^6$, откуда $n < p$.

Так как $n^2(n^3-1)(n^3+1)$ делится на p^2, хотя бы один из сомножителей должен делиться на p, а потому и на p^2 (два сомножителя не могут делиться на p, так как n^3-1 и n^3+1 взаимно просты с n^2 и отличаются на 2). При этом n^2 не делится на p^2, так как $n < p$. Если $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$ делится на p^2, то на p^2 должен делиться один из сомножителей $n+1$ и n^2-n+1 (иначе они оба делятся на p, и тогда на p делится $n^2-n+1-(n+1)^2+3(n+1) = 3$). Это также противоречит неравенству $n < p$. Наконец, если $n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$ делится на p^2, то на p^2 должен делиться один из сомножителей $n-1$ и n^2+n+1 (иначе они оба делятся на p, и тогда на p делится $n^2+n+1-(n-1)^2-3(n-1) = 3$). Поэтому на p^2 должно делиться число $n^2+n+1 \le (p-1)^2+(p-1)+1 < p^2$ — противоречие.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ СТАРШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа, не превосходящие 50n. Затем с доски стерли все числа, делящиеся на 50. Докажите, что сумма оставшихся чисел будет квадратом натурального числа.*

Решение. Искомая сумма равна $1+\ldots+50n-50(1+\ldots+n) = 50n(50n+1)/2-50n(n+1)/2 = 25\cdot 49\cdot n^2$.

Задача 2. *В выпуклом четырехугольнике ABCD выполнены соотношения: $\angle DAB = \angle ABC = 60°$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что AD+CB = AB.*

Решение. Продлим стороны *AD* и *BC* до пересечения в точке *K*. Тогда треугольник *AKB* будет равносторонним. Следовательно, треугольники *ABC* и *BKD* равны по стороне и двум углам, поэтому *BC = KD*, откуда *AB = AK = AD+DK = AD+BC*.

Задача 3. *12 шахматистов сыграли однокруговой турнир. Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 4 и 8 места?*

Ответ: Победил занявший четвертое место. Решение. Заметим, что в каждой партии разыгрывается одно очко. Поэтому уже в играх между собой шахматисты, занявшие последние 5 мест, вместе набрали не меньше очков, чем было сыграно между ними партий, то есть $5\times 4/2 = 10$. Итак, второй призер набрал не менее 10 очков. Очевидно, больше 10 очков он также не мог набрать — ведь если он набрал хотя бы 10,5 очков, то он никому не проиграл, а победитель набрал 11 очков и у всех выиграл. Поэтому второй призер набрал ровно 10 очков, и столько же очков набрали вместе игроки, занявшие последние 5 мест. Поскольку как раз 10 очков они набрали в играх между собой, всем остальным участникам они только проигрывали. В частности, шахматист, занявший восьмое место, проиграл занявшему четвертое.

Задача 4. *На плоскости дано 13 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее 130 неравнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.*

Решение. Подсчитаем наибольшее возможное количество равнобедренных треугольников с вершинами в наших точках. Рассмотрим любой отрезок *AB* между двумя из наших точек. Как известно, вершина равнобедренного треугольника с основанием *AB* должна лежать на серединном перпендикуляре к отрезку *AB*. Поскольку на этом серединном перпендикуляре по условию лежит не более двух наших точек, то существует не более двух равнобедренных треугольников с основанием *AB*. Всего есть 78 способов выбрать пару точек из 13, следовательно, общее количество равнобедренных треугольников не превосходит $78\cdot 2 = 13\cdot 12$. Так как общее количество треугольников на 13 вершинах равно $13\cdot 12\cdot 11/6 = 13\cdot 22$, то количество неравнобедренных треугольников не меньше, чем 130.

Задача 5. *$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — периодическая последовательность цифр (то есть существует такое T, что для всех n, начиная с некоторого, $a_n = a_{n+T}$). Докажите, что если из этой последовательности вычеркнуть все цифры, стоящие на местах с номерами, кратными данному k, полученная последовательность цифр тоже будет периодической.*

Решение. Возьмём какой-нибудь член последовательности с номером вида *Tn*+1 так, чтобы начиная с него члены последовательности периодически повторялись. Разделим исходную последовательность, начиная с этого члена, на отрезки длины *Tk*. Заметим, что эти отрезки одинаковы, и в каждом из них вычеркнуты числа, стоящие на одних и тех же позициях: *k*, 2*k*, …, *Tk* (считая от начала отрезка). Поэтому когда мы уберём вычеркнутые числа и «сплотим»

отрезки, получатся одинаковые отрезки, то есть последовательность будет периодической с периодом, равным длине каждого из них.

Задача 6. *Найдите все натуральные n и простые p такие, что* $n^8 - p^5 = n^2 + p^2$.

Ответ: $n = 2$, $p = 3$. Решение. Перепишем равенство в виде $n^8-n^2 = p^5+p^2$. Левая часть полученного уравнения равна $n^2(n^6-1)$ и увеличивается с ростом n, а правая увеличивается с ростом p. Поскольку $2^8-2^2 = 252 = 3^5+3^2 > 2^5+2^2$, нам достаточно разобрать случай $p > 3$. При этом, очевидно, $n > 2$ и поэтому $n^6 < n^8-n^2 = p^5+p^2 < p^6$, откуда $n < p$.

Так как $n^2(n^3-1)(n^3+1)$ делится на p^2, хотя бы один из сомножителей должен делиться на p, а потому и на p^2 (два сомножителя не могут делиться на p, так как n^3-1 и n^3+1 взаимно просты с n^2 и отличаются на 2). При этом n^2 не делится на p^2, так как $n < p$. Если $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$ делится на p^2, то на p^2 должен делиться один из сомножителей $n+1$ и n^2-n+1 (иначе они оба делятся на p, и тогда на p делится $n^2-n+1-(n+1)^2+3(n+1) = 3$). Это также противоречит неравенству $n < p$. Наконец, если $n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$ делится на p^2, то на p^2 должен делиться один из сомножителей $n-1$ и n^2+n+1 (иначе они оба делятся на p, и тогда на p делится $n^2+n+1-(n-1)^2-3(n-1) = 3$). Поэтому на p^2 должно делиться число $n^2+n+1 \le (p-1)^2+(p-1)+1 < p^2$ — противоречие.

Задача 7. *На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка P. Прямые, проходящие через P параллельно AB и BC, пересекают стороны BC и AB в точках X и Y. Оказалось, что отрезок XY перпендикулярен медиане BM треугольника. Докажите, что если изменить положение точки P, то отрезок XY удлинится.*

Решение. Достроим треугольник до параллелограмма $ABCT$. Обозначим через K точку пересечения прямых PX и BT. Тогда, в силу подобия треугольников BXK и BCT и теоремы Фалеса, $XK/CT = BX/BC = AP/AC = AY/AB = AY/CT$, откуда $XK = AY$, поэтому $XKAY$ — параллелограмм. Следовательно, $XY = AK$. Но длина отрезка AK минимальна, когда он (а, следовательно, и XY) перпендикулярен прямой BT, содержащей медиану BM.

Ялуб.ру