МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. Каждый элемент a конечного и содержащего более одного элемента множества M положительных чисел представляется в виде $1+b/c$, где b и c — также элементы M (a, b и c не обязательно различны). Докажите, что в M есть два разных числа, сумма которых больше 4.

2. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$, а M — середина стороны AC. Внутри треугольника дана точка P. Докажите, что $AP+BP+CP \geq 2BM$.

3. На сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) построены как на основаниях подобные треугольники BC_1A и BA_1C, причем первый из них лежит внутри ABC , а другой — снаружи. Точки M, N — середины отрезков AA_1, CC_1. Докажите, что $A_1C = 2MN$.

4. Дан выпуклый 100-угольник $A_1A_2\ldots A_{100}$. Его разбили на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Докажите, что эти треугольники можно единственным образом занумеровать числами 1, 2, …, 98 таким образом, чтобы любой треугольник с номером i содержал вершину A_i.

5. Сумма цифр натурального числа A равна S, а сумма цифр числа $5A$ равна T. Сколько нечетных цифр в десятичной записи числа A?

6. В каждом узле прямоугольного листа клетчатой бумаги нарисована стрелка в направлении одного из соседних по вертикали или горизонтали узлов (стрелки из граничных узлов не могут торчать наружу). Докажите, что есть две клетки, соседних по вертикали, горизонтали или диагонали, стрелки из которых направлены в противоположные стороны.

7. Натуральные числа a, b, c, d, n таковы, что $ab-cd-1$ делится на n. Докажите, что можно найти числа a', b', c', d', для которых $a-a'$, $b-b'$, $c-c'$, $d-d'$ делятся на n и $a'b'-c'd' = 1$.

8. n – натуральное число. Найдите сумму $\left[\sqrt{\frac{n}{1}}\right]+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+\left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]+\left[\sqrt{\frac{n}{5}}\right]+\ldots$, в которой в знаменателях стоят все натуральные числа, не делящиеся ни на какой квадрат, больший 1.

XXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2007

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3 И 5 МЕСТА

1. Каждый элемент a конечного и содержащего более одного элемента множества M положительных чисел представляется в виде $1+b/c$, где b и c — также элементы M (a, b и c не обязательно различны). Докажите, что в M есть два разных числа, сумма которых больше 4.

2. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$, а M — середина стороны AC. Внутри треугольника дана точка P. Докажите, что $AP+BP+CP \geq 2BM$.

3. На сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) построены как на основаниях подобные треугольники BC_1A и BA_1C, причем первый из них лежит внутри ABC , а другой — снаружи. Точки M, N — середины отрезков AA_1, CC_1. Докажите, что $A_1C = 2MN$.

4. Дан выпуклый 100-угольник $A_1A_2\ldots A_{100}$. Его разбили на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Докажите, что эти треугольники можно единственным образом занумеровать числами 1, 2, …, 98 таким образом, чтобы любой треугольник с номером i содержал вершину A_i.

5. Сумма цифр натурального числа A равна S, а сумма цифр числа $5A$ равна T. Сколько нечетных цифр в десятичной записи числа A?

6. У Димы есть клетчатый квадратный лист 21×21. Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Дима может произвольным образом выделить клетчатый квадрат 11×11 на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые — в черный цвет, а черные — в белый цвет. Сможет ли Дима с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа 21×21 (т.е. раскраску, в которой любые две соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета)? Сторона клетки равна 1.

7. Несколько натуральных чисел, оканчивающихся на 8, представлены в виде дробей с натуральными числителями и знаменателями. Пусть P — сумма числителей всех этих дробей, а Q — сумма их знаменателей. Оказалось, что $P = 2007Q$. Найдите последнюю цифру числа P.

8. n – натуральное число. Найдите сумму $\left[\sqrt{\frac{n}{1}}\right]+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]+\left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]+\left[\sqrt{\frac{n}{5}}\right]+\ldots$, в которой в знаменателях стоят все натуральные числа, не делящиеся ни на какой квадрат, больший 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО; ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Каждый элемент a конечного и содержащего более одного элемента множества M положительных чисел представляется в виде $1+b/c$, где b и c — также элементы M (a, b и c не обязательно различны). Докажите, что в M есть число, большее 2.

2. В треугольнике ABC угол $\angle B = 60°$, а M — середина стороны AC. Докажите, что $AC \geq BM$.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены как на основаниях подобные равнобедренные треугольники AC_1B и BA_1C, причем первый из них лежит внутри ABC, а другой — снаружи. Точка M такова, что AC_1MC — параллелограмм. Докажите, что $A_1C_1 = A_1M$.

4. Дан выпуклый 100-угольник $A_1A_2\ldots A_{100}$. Его разбили на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Докажите, что эти треугольники можно единственным образом занумеровать числами 1, 2, …, 98 таким образом, чтобы любой треугольник с номером i содержал вершину A_i.

5. Сумма цифр натурального числа A равна 100, а сумма цифр числа $5A$ равна 59. Сколько нечетных цифр в десятичной записи числа A?

6. У Димы есть клетчатый квадратный лист 20×20. Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Дима может произвольным образом выделить клетчатый квадрат 11×11 на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые — в черный цвет, а черные — в белый цвет. Сможет ли Дима с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа 20×20 (т.е. раскраску, в которой любые две соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета)? Сторона клетки равна 1.

7. Несколько натуральных чисел, оканчивающихся на 8, представлены в виде дробей с натуральными числителями и знаменателями. Пусть P — сумма числителей всех этих дробей, а Q — сумма их знаменателей. Оказалось, что $P = 2007Q$. Найдите последнюю цифру числа P.

8. Марко написал подряд два простых числа a и b, состоящие из одинакового количества цифр. Из получившегося числа c он вычел произведение a и b и получил 154. Найдите c.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1, 3, 5 МЕСТА

1. Каждый элемент a конечного и содержащего более одного элемента множества M положительных чисел представляется в виде $1+b/c$, где b и c — также элементы M (a, b и c не обязательно различны). Докажите, что в M есть число, большее 2.

2. В пятиугольнике $ABCDE$ $AE = ED$, $AB+CD = BC$, $\angle BAE+\angle CDE = 180°$. Докажите, что $\angle AED = 2\angle BEC$.

3. Марко написал подряд два простых числа a и b , состоящие из одинакового количества цифр. Из получившегося числа c он вычел произведение a и b и получил 154. Найдите c.

4. Дан выпуклый 100-угольник $A_1A_2\ldots A_{100}$. Его разбили на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Докажите, что эти треугольники можно единственным образом занумеровать числами 1, 2, …, 98 таким образом, чтобы любой треугольник с номером i содержал вершину A_i.

5. Сумма цифр натурального числа A равна 100, а сумма цифр числа $5A$ равна 59. Сколько нечетных цифр в десятичной записи числа A?

6. У Димы есть клетчатый квадратный лист 21×21. Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Дима может произвольным образом выделить клетчатый квадрат 11×11 на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые — в черный цвет, а черные — в белый цвет. Сможет ли Дима с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа 21×21 (т.е. раскраску, в которой любые две соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета)? Сторона клетки равна 1.

7. CH — высота остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle B > 2\angle A$. Докажите, что $2AH > AB+BC$.

8. На Марсе в ходу две денежные единицы: рубли и тугрики. Разменный автомат действует следующим образом: если положить в него n^2 рублей (при любом натуральном n, не превосходящем 26), то он выдает n тугриков. Если же положить в него m тугриков (при любом натуральном $m \geq 27$), то он выдаст m^2 рублей. Марсианин Саша подошел к автомату, имея в кармане только 89 тугриков. Могло ли в результате нескольких обменов у Саши остаться 2007 рублей и ни одного тугрика?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 и 3 МЕСТА

1. Каждый элемент a конечного и содержащего более одного элемента множества M положительных чисел представляется в виде $1+b/c$, где b и c — также элементы M (a, b и c не обязательно различны). Докажите, что в M есть число, большее 2.

2. Как разрезать квадрат на четыре части так, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник с углом 150°?

3. Марко написал подряд два простых числа a и b , состоящие из одинакового количества цифр. Из получившегося числа c он вычел произведение a и b и получил 154. Найдите c.

4. В кучке — 100 спичек. Играют двое, ходят по очереди. Первым ходом первый берёт из кучки 3 спички. Каждым следующим ходом можно брать из кучки количество спичек (большее или равное 0) на 1 меньшее или большее того, которое предыдущим ходом взял соперник. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?

5. Сумма цифр натурального числа A равна 100, а сумма цифр числа $5A$ равна 59. Сколько нечетных цифр в десятичной записи числа A?

6. Можно ли на 89 карточках синим цветом написать все целые числа от 10 до 98, а красным цветом — все целые числа от 11 до 99 (на каждой карточке — по одному синему и красному числу) так, чтобы всякий раз, когда синее число на карточке A делится на синее число на карточке B, красное число на карточке A делилось бы на красное число на карточке B?

7. CH — высота остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle B = 2\angle A$. Докажите, что $2AH = AB+BC$.

8. Пятиугольник разрезан диагоналями на 11 частей. Гоше с огромным трудом удалось вписать в них числа 1, 2, 3, ..., 11 так, чтобы суммы чисел во всех треугольниках с вершинами в вершинах пятиугольника были равны. Какое число Гоша мог поставить в центральный пятиугольник? (Найдите все возможные значения x, либо докажите, что их нет. Для каждого значения x должен быть приведен пример расстановки.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5 И 7 МЕСТА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Каждый элемент a конечного и содержащего более одного элемента множества M положительных чисел представляется в виде $1+b/c$, где b и c – также элементы M (a, b и c не обязательно различны). Докажите, что в M есть число, большее 2.

2. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K. BL – биссектриса треугольника. Оказалось, что $BK = AB$ и $CK = AL$. Найдите углы треугольника.

3. Существует ли пятнадцатизначное натуральное число A, такое что сумма цифр A равна 55, а сумма цифр числа $5A$ равна 50?

4. Пятиугольник разрезан диагоналями на 11 частей. Впишите в них числа 1, 2, 3, ..., 11 так, чтобы суммы чисел были равны во всех треугольниках, все вершины которых являются вершинами пятиугольника.

5. У Димы есть клетчатый квадратный лист 20×20. Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Дима может произвольным образом выделить клетчатый квадрат 11×11 на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые – в черный цвет, а черные – в белый цвет. Сможет ли Дима с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа 20×20 (т.е. раскраску, в которой любые две соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета)? Сторона клетки равна 1.

6. В кучке — 100 спичек. Играют двое, ходят по очереди. Первым ходом первый берёт из кучки 3 спички. Каждым следующим ходом можно брать из кучки количество спичек (большее или равное 0) на 1 меньшее или большее того, которое предыдущим ходом взял соперник. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?

7. Разрежьте квадрат не более чем на четыре части так, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник с углом 150°.

8. Какое наименьшее количество задач должна решить команда, чтобы гарантированно получить положительное количество баллов вне зависимости от тактики соперника? Предполагается, что команда ставит себе целью получение баллов, а не выигрыш.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2007

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1, 3, 5 МЕСТА

1. Сумма цифр натурального числа A равна 100, а сумма цифр числа $5A$ равна 59. Сколько нечетных цифр в десятичной записи числа A?

2. Можно ли на 89 карточках синим цветом написать все целые числа от 10 до 98, а красным цветом — все целые числа от 11 до 99 (на каждой карточке — по одному синему и красному числу) так, чтобы всякий раз, когда синее число на карточке A делится на синее число на карточке B, красное число на карточке A делилось бы на красное число на карточке B?

3. В восьми вазах лежат конфеты: в первой — одна, во второй — две, в третьей — три, …, в восьмой — 8 конфет. Маша съедает каждый день ровно k конфет (k — некоторое натуральное число), причём из каждой вазы берёт не более одной конфеты. Найдите все значения k, при которых Маша сумеет (возможно, за несколько дней) съесть все конфеты.

4. В кучке — 100 спичек. Играют двое, ходят по очереди. Первым ходом первый берёт из кучки 3 спички. Каждым следующим ходом можно брать из кучки количество спичек (большее или равное 0) на 1 меньшее или большее того, которое предыдущим ходом взял соперник. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?

5. Каждый из пятерых гномов, о которых пойдет речь, либо всегда говорит правду, либо всегда врёт. Однажды Глоин сказал Дори: «Балин сказал, что Двалин врун, Двалин — что Ори врун, Ори — что Балин врун» «Сам ты врун!» — ответил Глоину Дори. Врун Дори, правдолюб, или это невозможно установить, исходя из данных задачи?

6. У торговца есть весы с двумя чашами, гиря весом 1 кг, а также достаточный запас сахара, соли и невесомых пакетов. За какое наименьшее число взвешиваний он сможет отвесить покупателю 230 кг сахара и 17 кг соли? Весы достаточно велики, чтобы можно отвесить любое необходимое для решения количество сахара или соли.

7. Спускаясь в метро, Петя и Вася бежали по движущемуся вниз эскалатору. Вася, пока бежал, насчитал 60 ступенек. Петя бежал вдвое быстрее Васи и насчитал 90 ступенек. Сколько ступенек насчитал бы каждый из них, сбегая по неподвижному эскалатору?

8. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 на пять прямоугольников, сумма периметров которых равна 9?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2007

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 7 МЕСТО

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Сумма цифр натурального числа A равна 100, а сумма цифр числа $5A$ равна 59. Сколько нечетных цифр в десятичной записи числа A?

2. Можно ли на 90 карточках синим цветом написать все целые числа от 10 до 99, а красным цветом — все целые числа от 11 до 100 (на каждой карточке — по одному синему и красному числу) так, чтобы всякий раз, когда синее число на карточке A делится на синее число на карточке B, красное число на карточке A делилось бы на красное число на карточке B?

3. В восьми вазах лежат конфеты: в первой — одна, во второй — две, в третей — три, …, в восьмой — 8 конфет. Маша съедает каждый день ровно k конфет (k — некоторое натуральное число), причём из каждой вазы берёт не более одной конфеты. Найдите все значения k, при которых Маша сумеет (возможно, за несколько дней) съесть все конфеты.

4. Два восьмизначных числа отличаются перестановкой цифр. Может ли их сумма быть равна 20062007?

5. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 на пять прямоугольников сумма периметров которых равна 9?

6. По кругу стоят 22 человека, каждый из них — рыцарь (который всегда говорит только правду) или лжец (который всегда лжет). Каждый из них произнес фразу: «Следующие 10 человек по часовой стрелке после меня — лжецы.» Сколько среди этих 22 людей лжецов?

7. В кучке — 100 спичек. Играют двое, ходят по очереди. Первым ходом первый берёт из кучки 3 спички. Каждым следующим ходом можно брать из кучки количество спичек (большее или равное 0) на 1 меньшее или большее того, которое предыдущим ходом взял соперник. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?

8. У Димы есть клетчатый квадратный лист 20×20. Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Дима может произвольным образом выделить клетчатый квадрат 11×11 на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые — в черный цвет, а черные — в белый цвет. Сможет ли Дима с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа 20×20 (т.е. раскраску, в которой любые две соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета)? Сторона клетки равна 1.