

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. $ABCD$ — параллелограмм, DE — биссектриса треугольника ADB . Известно, что $2BC^2 = BD^2$. Докажите, что $AE = AC - AB$.
2. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I . Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA .
3. Существует ли бесконечное множество натуральных чисел, в котором никакие два числа не являются взаимно простыми, а любые три взаимно просты?
4. a, b, c — различные числа такие, что $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Докажите, что среди них есть как положительное, так и отрицательное число.
5. Решите в целых числах уравнение $x(1+x+x^2) = 4y(y+1)$.
6. (a_n) — бесконечная арифметическая прогрессия с натуральными членами. Докажите, что из последовательности $(1/a_n)$ можно выделить арифметическую прогрессию длины 100.
7. Каким наибольшим количеством способов можно разбить квадрат $n \times n$ ($n > 3$) на полосы (т.е. прямоугольники ширины 1 и натуральной длины) так, чтобы ни в каких двух способах нельзя было указать по одинаковому прямоугольнику на одном и том же месте?
8. Группе участников ЕГЭ предложили 4 вопроса, на каждый из которых нужно было выбрать один из трёх вариантов ответа. Оказалось, что для каждого трёх участников экзамена был вопрос, на который они дали три разных ответа. Какое наибольшее количество людей могло участвовать в этом экзамене?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Из вершины B треугольника ABC опустили перпендикуляры BX и BY на биссектрисы углов A и C . Докажите, что прямая XY проходит через середину биссектрисы угла B .
2. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I . Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA .
3. Существует ли 1000 натуральных чисел, среди которых никакие два числа не являются взаимно простыми, а любые три взаимно просты?
4. a, b, c — различные числа такие, что $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$.
Докажите, что среди них есть как положительное, так и отрицательное число.
5. Решите в целых числах уравнение $x(1+x+x^2) = 4y(y+1)$.
6. В строчку выписана бесконечная последовательность чисел $a, a+d, a+2d, \dots$ (a и d — заданные натуральные числа). Докажите, что среди чисел, обратных к выписанным, найдутся три, одно из которых равно среднему арифметическому двух других.
7. Каким наибольшим количеством способов можно разбить квадрат $n \times n$ ($n > 3$) на полосы (т.е. прямоугольники ширины 1 и натуральной длины) так, чтобы ни в каких двух способах нельзя было указать по одинаковому прямоугольнику на одном и том же месте?
8. На плоскости проведены все прямые с уравнениями вида $y = kx + l$, $1 \leq k \leq 10$, $1 \leq l \leq 10$, k, l — натуральные числа. Какое наибольшее количество таких прямых может пересечься в одной точке?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Каким наибольшим количеством способов можно разрезать квадрат $n \times n$ на полосы (т.е. клетчатые прямоугольники, одна из сторон которого равна 1) так, чтобы ни в каких двух способах нельзя было указать по одинаковой полоске на одном и том же месте? (Полоски могут располагаться как вертикально, так и горизонтально).
2. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I . Известно, что $CA + AI = BC$. Во сколько раз $\angle BAC$ больше $\angle CBA$?
3. Существует ли бесконечное множество натуральных чисел, в котором никакие два не являются взаимно простыми, а любые три взаимно просты?
4. a, b, c — различные числа такие, что $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Докажите, что среди них есть как положительное, так и отрицательное число.
5. Дан треугольник KML , в котором $\angle KML = 121^\circ$. Точки S и N на стороне KL таковы, что $KS = SN = NL$. Известно, что $MN > NS$. Докажите, что $MS < NS$.
6. Решите в натуральных числах уравнение $x(1+x+x^2) = 4y(y+1)$.
7. Можно ли так отметить на плоскости 10 красных, 10 синих и 10 зеленых точек, все расстояния между которыми попарно различны, чтобы для каждой красной точки ближайшая к ней цветная была синей, для каждой синей — зелёной, а для каждой зелёной — красной?
8. 27 школьников сдавали ЕГЭ. Им предложили 4 вопроса, на каждый из которых нужно было выбрать один из трёх вариантов ответа. Оказалось, что на каждый вопрос было дано по 9 ответов каждого из трех видов. Могло ли так случиться, что для каждого из трёх участников экзамена был вопрос, на который они дали три разных ответа?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число n . Известно, что из следующих семи утверждений: 1) n делится на 6; 2) n делится на 10; 3) n делится на 15; 4) n делится на 14; 5) n делится на 22; 6) n делится на 77; 7) n делится на 8 — ровно два неверных. Верно ли, что n делится на 4?

2. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I . Известно, что $CA + AI = BC$. Во сколько раз угол BAC больше угла CBA ?

3. Существуют ли сто натуральных чисел, среди которых никакие два числа не являются взаимно простыми, а любые три взаимно просты?

4. В гандбольном турнире в один круг участвовали несколько студенческих команд и две школьных. Каждая команда сыграла с каждой ровно один матч. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0. Известно, что все студенческие команды набрали одинаковое число очков, а обе школьные — по 14 очков. Сколько студенческих команд могло участвовать в турнире (найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)?

5. При каких a система
$$\begin{cases} |x| + |1 - y| = \frac{1}{2007} \\ |1 - x| + |y| = a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение?

6. В строчку без пробелов выписаны последовательные натуральные числа (123456789101112131415...). Найдите в этой строчке первый кусок длины 2007, в котором встречается не более трех различных цифр.

7. Можно ли отметить на плоскости 10 красных, 10 синих и 10 зеленых точек, все расстояния между которыми различны, так, чтобы для каждой красной точки ближайшая к ней цветная была синего цвета, для каждой синей — зелёного, а для каждой зелёной — красного?

8. В нескольких чашках лежат алмазы и изумруды, по три драгоценных камня в каждой чашке. Всего 300 алмазов и 300

изумрудов. Докажите, что чашки можно разделить на две группы, в каждой из которых по 150 алмазов и 150 изумрудов.

ЯГубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число n . Известно, что из следующих семи утверждений: 1) n делится на 6; 2) n делится на 10; 3) n делится на 15; 4) n делится на 14; 5) n делится на 22; 6) n делится на 77; 7) n делится на 8 — ровно два неверных. Верно ли, что n делится на 4?
2. Существуют ли два треугольника ABC и FED , что $AB = BC = FE = ED$ и треугольник ABC полностью лежит внутри треугольника FED ?
3. Существуют ли пять натуральных чисел, среди которых никакие два числа не являются взаимно простыми, а любые три взаимно просты?
4. В гандбольном турнире в один круг участвовали несколько студенческих команд и две школьных. Каждая команда сыграла с каждой ровно один матч. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0. Известно, что все студенческие команды набрали одинаковое число очков, а обе школьные — по 14 очков. Сколько студенческих команд могло участвовать в турнире (найдите все возможные ответы и докажете, что других нет)?
5. Найдите наименьшее значение выражения $|x| + |x + 1| + |x + 2| + |x + 3|$.
6. В строчку без пробелов выписаны последовательные натуральные числа (123456789101112131415...). Найдите в этой строчке первый кусок длины 15, в котором встречается не более трех различных цифр.
7. Можно ли отметить на плоскости 10 красных, 10 синих и 10 зеленых точек, все расстояния между которыми различны, так, чтобы для каждой красной точки ближайшая к ней цветная была синей, для каждой синей — зелёной, а для каждой зелёной — красной?
8. В нескольких чашках лежат $4n$ алмазов и $4k$ изумрудов, по два драгоценных камня в каждой чашке. Докажите, что чашки можно разделить на две группы, в каждой из которых по $2n$ алмазов и $2k$ изумрудов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2007

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Можно ли на гранях куба расставить числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 так, чтобы каждое число являлось делителем суммы четырех своих соседей?
2. В строчку без пробелов выписаны последовательные натуральные числа (123456789101112131415...). Найдите в этой строчке первый кусок длины 2007, в котором встречается не более трех различных цифр.
3. В гандбольном турнире в один круг участвовали несколько студенческих команд и две школьных. Каждая команда сыграла с каждой ровно один матч. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0. Известно, что все студенческие команды набрали одинаковое число очков, а обе школьные — по 14 очков. Сколько студенческих команд могло участвовать в турнире (найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)?
4. Существуют ли четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат какого-либо натурального числа, отличного от 1?
5. Каждый этаж 14-этажного дома в городе Телепорт разделен на одинаковые квадратные комнаты, образующие квадрат 7×7 . Все комнаты на каждом этаже объединены в квартиры, которые в плане представляют собой прямоугольники ширины 1. Докажите, что найдутся две одинаковые квартиры, находящиеся на разных этажах (не обязательно соседних) точно одна над другой.
6. Девять школьников сдавали ЕГЭ. Им предложили 3 вопроса, на каждый из которых нужно было выбрать один из трёх вариантов ответа. Оказалось, что на каждый вопрос было дано по 3 ответа каждого вида. Могло ли так случиться, что для каждого трёх участников экзамена был вопрос, на который они дали три разных ответа?
7. Можно ли отметить на плоскости 10 красных, 10 синих и 10 зеленых точек, все расстояния между которыми различны, так, чтобы для каждой красной точки ближайшая к ней цветная была синей, для каждой синей — зелёной, а для каждой зелёной — красной?
8. Дано натуральное число n . Известно, что из следующих семи утверждений: 1) n делится на 6; 2) n делится на 8; 3) n делится на 10; 4) n делится на 14; 5) n делится на 22; 6) n делится на 33; 7) n делится на 35 — ровно два неверных. Верно ли, что n делится на 4?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2007

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Можно ли на гранях куба расставить числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 так, чтобы каждое число являлось делителем суммы четырех своих соседей?
2. Турист проехал от А до Б за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй день — $\frac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км, а в третий день — $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами А и Б.
3. В гандбольном турнире в один круг участвовали несколько студенческих команд и две школьных. Каждая команда сыграла с каждой ровно один матч. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0. Известно, что все студенческие команды набрали одинаковое число очков, а обе школьные — по 14 очков. Сколько студенческих команд могло участвовать в турнире (найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)?
4. Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат какого-либо натурального числа, отличного от 1?
5. Дано натуральное число n . Известно, что из следующих семи утверждений: 1) n делится на 6; 2) n делится на 10; 3) n делится на 15; 4) n делится на 14; 5) n делится на 22; 6) n делится на 77; 7) n делится на 8 — ровно два неверных. Верно ли, что n делится на 4?
6. Девять школьников сдавали ЕГЭ. Им предложили 3 вопроса, на каждый из которых нужно было выбрать один из трёх вариантов ответа. Оказалось, что на каждый вопрос было дано по 3 ответа каждого вида. Могло ли так случиться, что для каждого трёх участников экзамена был вопрос, на который они дали три разных ответа?
7. Можно ли отметить на плоскости 10 красных, 10 синих и 10 зеленых точек, все расстояния между которыми различны, так, чтобы для каждой красной точки ближайшая к ней цветная была синей, для каждой синей — зелёной, а для каждой зелёной — красной?
8. На доске пишут числа. За одну операцию можно дописать сразу два числа — $2A$ и $3A$, если на доске уже написано натуральное число A . Можно ли, начав с некоторого числа, меньшего 2007, и дописывая числа по указанному правилу, добиться того, чтобы сумма всех чисел на доске стала равна 2007?