

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20, 50, 100 и 500 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?
2. На международный конкурс проектов штаб-квартиры ОАО "ПукПрод" поступило множество проектов. В каждом проекте была подсчитана *удаленность капитала*: для каждого акционера расстояние от места его жительства до предполагаемого места строительства умножили на процент акций, принадлежащих этому акционеру, и полученные произведения сложены. Авторы каждого проекта заметили, что удаленность капитала в предложенном ими месте строительства не больше, чем в любой другой точке. Известно, что не все акционеры ОАО живут на одной прямой. Докажите, что все проекты предполагают строить штаб-квартиру в одном и том же месте.
3. Натуральное число назовем *трёхчастным*, если все его натуральные делители можно разбить на три группы с одинаковой суммой. Докажите, что трёхчастных чисел бесконечно много.
4. P и S — периметр и площадь прямоугольника соответственно. Докажите, что
$$P \geq \frac{32S}{2S + P + 2}.$$
5. Чётно или нечётно количество упорядоченных пятёрок натуральных чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1$?
6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором $AB = BC = BD$ и $\angle ABC = 120^\circ$, на продолжении диагонали AC за точку C выбрали точку K таким образом, что $\angle CDK = 30^\circ$. Докажите, что KA — биссектриса угла BKD .
7. В классе учатся n мальчиков и n девочек. Каждый мальчик составил рейтинг девочек в порядке убывания: какая нравится ему больше всего, какая на втором месте и т.д. (никакие две девочки не нравятся никакому мальчику в одинаковой степени). На день святого Валентина каждому мальчику подарили по девочке. Обсуждая полученные подарки, мальчики заметили, что при любом другом распределении девочек хотя бы одному из них досталась бы меньше нравящаяся ему девочка. Докажите, что хотя бы один из мальчиков получил ту девочку, которая нравилась ему больше всего.
8. На какое наибольшее количество составных слагаемых можно разбить число 2007?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20 и 50 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех пятерых вместе?
2. На международный конкурс проектов штаб-квартиры ОАО "ПукПрод" поступило множество проектов, в каждом из которых, в частности, сообщалось, что сумма расстояний от предполагаемого места строительства до мест жительства акционеров ОАО не больше, чем такая же сумма в любой другой точке. Известно, что не все акционеры ОАО живут на одной прямой. Докажите, что все проекты предполагают строить штаб-квартиру в одном и том же месте.
3. Натуральное число назовем *двухчастным*, если все его натуральные делители можно разбить на две группы с одинаковой суммой. Докажите, что двухчастных чисел бесконечно много.
4. P и S — периметр и площадь прямоугольника соответственно. Докажите, что
$$P \geq \frac{32S}{2S + P + 2}$$
5. Четно или нечетно количество упорядоченных четвёрок натуральных чисел (a_1, a_2, a_3, a_4) таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{100}$?
6. На отрезке BD выбрана точка C и построены с одной стороны от BD два равносторонних треугольника: BAC и CED . Отрезки AD и CE пересекаются в точке L , отрезки BE и AC — в точке K . Докажите, что треугольник CKL — равносторонний.
7. В классе учатся n мальчиков и n девочек. Каждый мальчик составил рейтинг девочек в порядке убывания: какая нравится ему больше всего, какая на втором месте и т.д. (никакие две девочки не нравятся никакому мальчику в одинаковой степени). На день святого Валентина каждому мальчику подарили по девочке. Обсуждая полученные подарки, мальчики заметили, что при любом другом распределении девочек хотя бы одному из них досталась бы меньше нравящаяся ему девочка. Докажите, что хотя бы один из мальчиков получил ту девочку, которая нравилась ему больше всего.
8. На какое наибольшее количество составных слагаемых можно разбить число 2007?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20 и 50 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?
2. Имеется 6 монет, из которых не более двух фальшивых (возможно, все монеты настоящие). Фальшивые монеты весят меньше настоящих на 1 грамм. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определите все фальшивые монеты или докажите, что их нет.
3. У Васи есть трехзначное число A и двузначное число B . Если к B справа приписать A , то полученное пятизначное число будет на 88011 больше пятизначного числа, которое получится, если к A справа приписать B . Найдите эти числа.
4. Чётно или нечётно количество упорядоченных четвёрок натуральных чисел (a_1, a_2, a_3, a_4) таких, что
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{100}?$$
5. На отрезке BD выбрана точка C и построены с одной стороны от BD два равносторонних треугольника: BAC и CED . Отрезки AD и CE пересекаются в точке L , отрезки BE и AC — в точке K . Докажите, что треугольник CKL — равносторонний.
6. Натуральное число назовем *двухчастным*, если все его натуральные делители можно разбить на две группы с одинаковой суммой. Докажите, что двухчастных чисел бесконечно много.
7. В классе учатся n мальчиков и n девочек. Каждый мальчик составил рейтинг девочек в порядке убывания: какая нравится ему больше всего, какая на втором месте и т.д. (никакие две девочки не нравятся никакому мальчику в одинаковой степени). На день святого Валентина каждому мальчику подарили по девочке. Обсуждая полученные подарки, мальчики заметили, что при любом другом распределении девочек хотя бы одному из них досталась бы меньше нравящаяся ему девочка. Докажите, что хотя бы один из мальчиков получил ту девочку, которая нравилась ему больше всего.
8. На какое наибольшее количество составных слагаемых можно разбить число 2007?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Имеется 6 монет, из которых не более двух фальшивых. Фальшивые монеты весят по 9 г, настоящие — по 10 г. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определите все фальшивые монеты (или докажете, что их нет).
2. В пять стоящих в ряд горшочков Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно во все и не обязательно поровну). Винни-Пух может одновременно взять два рядом стоящих горшочка. Какое наибольшее количество мёда может гарантированно съесть Винни-Пух?
3. У Васи есть трехзначное число A и двузначное число B . Если к B справа приписать A , то полученное пятизначное число будет на 88011 больше пятизначного числа, которое получится, если к A справа приписать B . Найдите эти числа.
4. Делится ли на 3 количество решений уравнения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{20}$, где a , b и c — натуральные числа?
5. На отрезке BD выбрана точка C и построены с одной стороны от BD два равносторонних треугольника: BAC и CED . Отрезки AD и CE пересекаются в точке L , отрезки BE и AC — в точке K . Докажите, что $CK = CL$.
6. Натуральное число назовем *двухчастным*, если все его натуральные делители можно разбить на две группы с одинаковой суммой. Докажите, что двухчастных чисел бесконечно много.
7. В классе учатся n мальчиков и n девочек. Каждый мальчик составил рейтинг девочек в порядке убывания: какая нравится ему больше всего, какая на втором месте и т.д. (никакие две девочки не нравятся никакому мальчику одинаково). На день святого Валентина каждая девочка выбрала, к какому мальчику она пойдёт в гости. Мальчики заметили, что при любом другом распределении девочек хотя бы к одному из них пришла бы менее нравящаяся ему девочка. Докажите, что хотя бы к одному из мальчиков пришла та девочка, которая нравилась ему больше всего.
8. На какое наибольшее количество составных слагаемых можно разбить число 2007?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Пять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20 и 50 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех пятерых вместе?
2. В три стоящие в ряд горшочка Кролик налил два килограмма мёда (не обязательно во все и не обязательно поровну). Винни-Пух может одновременно взять два рядом стоящих горшочка. Какое наибольшее количество мёда может гарантированно съесть Винни-Пух?
3. Сумма двух двузначных чисел равна 68. Если к большему из них приписать справа меньшее, то полученное четырёхзначное число будет на 2178 больше того четырёхзначного числа, которое получится, если к меньшему приписать справа большее. Найдите эти числа.
4. Из натуральных чисел от 1 до 1250 выбрали два набора по 50 чисел в каждом. Один набор выписан вдоль верхней стороны таблицы 50×50 , а другой — вдоль левой стороны этой таблицы. В клетки таблицы записаны суммы соответствующих чисел из наборов («таблица сложения»). Могут ли все эти 2500 сумм оказаться различными?
5. На отрезке BD выбрана точка C и построены с одной стороны от BD два равнобедренных треугольника: BAC и CED . Отрезки AD и CE пересекаются в точке L , отрезки BE и AC — в точке K . Докажите, что $CK = CL$.
6. Имеется 6 монет, из которых одна или две фальшивые. Фальшивые монеты весят по 9 г, настоящие — по 10 г. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определите все фальшивые монеты.
7. Натуральное число назовем *двухчастным*, если все его натуральные делители можно разбить на две группы с одинаковой суммой. Существует ли двухчастное число, большее 2007?
8. На какое наибольшее количество составных слагаемых можно разбить число 2007?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2007

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20 и 50 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?
2. В пять стоящих в ряд чашек Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно во все и не обязательно поровну). Винни-Пух может одновременно взять две рядом стоящие чашки. Какое наибольшее количество мёда может гарантированно взять Винни-Пух?
3. Делится ли на 3 количество упорядоченных троек натуральных чисел (a_1, a_2, a_3) таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{100}$?
4. На какое наибольшее количество составных слагаемых можно разбить число 2007?
5. Имеется 6 монет, из которых не более двух фальшивых. Фальшивые монеты весят по 9 г, настоящие — по 10 г. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определите все фальшивые монеты (или докажете, что их нет).
6. У Васи есть трехзначное число A и двузначное число B . Если к B справа приписать A , то полученное пятизначное число будет на 88011 больше пятизначного числа, которое получится, если к A справа приписать B . Найдите эти числа.
7. Натуральное число назовем *двухчастным*, если все его натуральные делители можно разбить на две группы с одинаковой суммой. Найдите хотя бы одно двухчастное число, большее 2000.
8. Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 12 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 77 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2007

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20 и 50 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех пятерых вместе?
2. В пять стоящих в ряд чашек Кролик налил три килограмма мёда. Винни-Пух может одновременно взять две рядом стоящие чашки. Какое наибольшее количество мёда может гарантированно взять Винни-Пух?
3. Делится ли на 3 количество упорядоченных троек натуральных чисел (a_1, a_2, a_3) таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{100}$?
4. На какое наибольшее количество составных слагаемых можно разбить число 2007?
5. Имеется 6 монет, одна или две из которых фальшивые. Настоящие монеты весят по 10 г, а фальшивые — по 9 г каждая. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определите все фальшивые монеты.
6. Сумма двух двузначных чисел равна 68. Если к большему из них приписать справа меньшее, то полученное четырёхзначное число будет на 2178 больше того четырёхзначного числа, которое получится, если к меньшему приписать справа большее. Найдите эти числа.
7. Из натуральных чисел от 1 до 1250 выбрали два набора по 50 чисел в каждом. Один набор выписан вдоль верхней стороны таблицы 50×50 , а другой — вдоль левой стороны этой таблицы. В клетки таблицы записаны суммы соответствующих чисел из наборов («таблица сложения»). Могут ли все эти 2500 сумм оказаться различными?
8. Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 12 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 77 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?