XXVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. НИЖНЕКАМСК, 31.10-06.11.2006

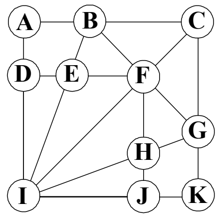
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 2.11.2006

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На бесконечной ленте последовательно выписываются числа: сначала 1, потом 2, а дальше (n+1)-е число получается из n-го прибавлением остатка от деления n-го числа на n+1. Какое наибольшее количество раз на ленте может быть выписано одно и то же число?

2. На плоскости отмечены вершины выпуклого n-угольника и несколько точек внутри этого n-угольника так, что никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. n-угольник разбит на треугольники с вершинами в отмеченных точках. Оказалось, что каждая отмеченная точка, лежащая внутри n-угольника, является вершиной ровно 6 треугольников разбиения. Докажите, что хотя бы три вершины n-угольника принадлежат не более чем двум треугольникам разбиения.

3. В каждой клетке шахматной доски 8×8 стоит 0. Разрешается выбрать любые две клетки, соединенные ходом коня, и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа 1, 2, …, 64 (не обязательно идущие по порядку)?



4. Буквы A, B, …, K на рисунке обозначают числа 1, 2, …, 11 (разные буквы – разные числа) так, что суммы чисел во всех десяти отмеченных рядах из трех клеток одинаковы. Какие значения может принимать буква I?

5. a, b, c, n — натуральные числа такие, что $(a+bc)(b+ac) = 5^n$. Докажите, что n четно.

6. Сумма чисел x, y, z отлична от 0. Докажите, что $\frac{x(y-z)}{y+z}+\frac{y(z-x)}{z+x}+\frac{z(x-y)}{x+y}=0$ тогда и только тогда, когда хотя бы два из чисел x, y, z равны.

7. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взяли точку E. Когда точку C отразили относительно отрезка BE, она попала на среднюю линию прямоугольника, параллельную стороне AB. Найдите угол BED.

8. Точки M_1 и M_2 лежат внутри треугольника ABC. Точки C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2 выбраны на сторонах AB, BC, AC соответственно таким образом, что A_1M_1 параллельно M_2B_2 и AB, B_1M_1 параллельно M_2C_2 и BC, C_1M_1 параллельно M_2A_2 и AC. Известно, что $A_1M_1 = B_1M_1 = C_1M_1 = l_1$, $A_2M_2 = B_2M_2 = C_2M_2 = l_2$. Докажите, что $l_1 = l_2$.

XXVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. НИЖНЕКАМСК, 31.10-06.11.2006

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 2.11.2006

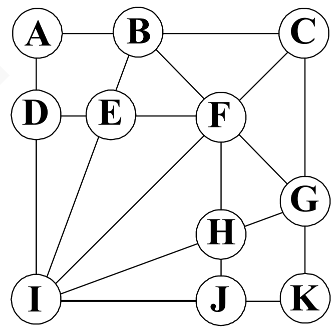
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На бесконечной ленте последовательно выписываются числа: сначала 1, потом 2, а дальше $(n+1)$-е число получается из n-го прибавлением остатка от деления n-го числа на $n+1$. Какое наибольшее количество раз на ленте может быть выписано одно и то же число?

2. Числа от 1 до 50 разбили на десять пятерок и в каждой пятерке выбрали среднее по величине число. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных чисел?

3. В каждой клетке шахматной доски 4×4 стоит 0. Разрешается выбрать любые две клетки, соединенные ходом коня, и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа 1, 2, …, 16 (не обязательно идущие по порядку)?

4. Буквы A, B, …, K на рисунке обозначают числа 1, 2, …, 11 (разные буквы – разные числа) так, что суммы чисел во всех десяти отмеченных рядах из трех клеток одинаковы. Какие значения может принимать буква I?



5. a, b, n — натуральные числа такие, что $(a+4b)(b+4a) = 5^n$. Докажите, что $a = b$.

6. Сумма чисел x, y, z отлична от 0. Докажите, что $\dfrac{x(y-z)}{y+z}+\dfrac{y(z-x)}{z+x}+\dfrac{z(x-y)}{x+y}=0$ тогда и только тогда, когда хотя бы два из чисел x, y, z равны.

7. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взяли точку E. Когда точку C отразили относительно отрезка BE, она попала на среднюю линию прямоугольника, параллельную стороне AB. Найдите угол BED.

8. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Точки C_1, A_1 и B_1 выбраны на сторонах AB, BC, AC соответственно таким образом, что A_1M параллельно AB, B_1M параллельно BC, C_1M параллельно AC. Известно, что $A_1M = B_1M = C_1M$. Докажите, что M – центр треугольника ABC.

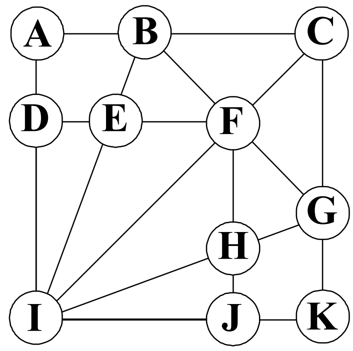
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 2.11.2006

ВТОРАЯ ЛИГА

1. Поезд вышел со станции A, проследовал мимо станции B, затем C и прибыл на станцию D. Часть пути от A до C он прошел за 2 часа, а от B до D – за 3 часа. Расстояние от A до B — 100 км, от B до C — 60 км, от C до D — 180 км. Какое наименьшее время поезд мог потратить на весь путь, если известно, что он нигде не превышал скорость в 100 км/час?

2. В волейбольном турнире участвовали несколько команд седьмых и шестых классов (каждые две команды сыграли ровно один матч, ничьих в волейболе не бывает). Команд семиклассников было в пять раз меньше, чем команд шестиклассников, а побед семиклассники одержали в два раза меньше, чем шестиклассники. Сколько всего команд участвовало в турнире?

3. В каждой клетке доски 4×4 стоит 0. Разрешается выбрать любые две клетки, соединенные ходом коня, и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа 1, 2, …, 16 (не обязательно идущие по порядку)?



4. Буквы A, B, …, K на рисунке обозначают числа 1, 2, …, 11 (разные буквы – разные числа) так, что суммы чисел во всех десяти отмеченных рядах из трех клеток одинаковы. Какие значения может принимать буква I?

5. Числа от 1 до 30 разбили на десять троек, и в каждой тройке взяли среднее по величине число. Какое наибольшее значение может принимать сумма взятых чисел?

6. Натуральные числа n и m таковы, что $(4m - n)(n + m) = 6m^2$. Докажите, что n кратно m.

7. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взяли точку E. Когда точку C отразили относительно отрезка BE, она попала на среднюю линию прямоугольника, параллельную стороне AB. Найдите угол BED.

8. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Точки C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2 выбраны на сторонах AB, BC, AC соответственно таким образом, что A_1M и B_1A_2 параллельны AB, B_1M и C_1B_2 параллельны BC, C_1M_1 и A_1C_2 параллельны AC. Известно, что $A_1C_2 = B_1A_2 = C_1B_2$. Докажите, что M — центр треугольника ABC.

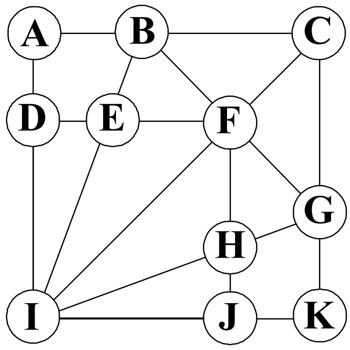
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 2.11.2006

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Изначально на доске написано число 1. Учительница по очереди вызывает к доске учеников. n-ый ученик прибавляет к числу, записанному последним, остаток от его деления на n+1 и записывает результат на доску. (Доска очень большая, а учеников очень много.) Какое наибольшее количество равных чисел может оказаться на доске?

2. На плоскости отмечены вершины выпуклого 10-угольника и 10 точек внутри него так, что никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. 10-угольник разбит на треугольники с вершинами в отмеченных точках. Оказалось, что каждая отмеченная точка, лежащая внутри 10-угольника, является вершиной ровно шести треугольников разбиения. Докажите, что какая-то вершина 10-угольника принадлежат не более чем двум треугольникам разбиения.

3. В каждой клетке шахматной доски стоит 0. Разрешается выбрать любые две клетки, соединенные ходом коня, и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа 1, 2, …, 64 (не обязательно идущие по порядку)?



4. Буквы A, B, …, K на рисунке обозначают числа 1, 2, …, 11 (разные буквы – разные числа) так, что суммы чисел во всех десяти отмеченных рядах из трех клеток одинаковы. Какие значения может принимать буква I?

5. a, b, c, n — натуральные числа такие, что $(a+4b)(b+4a) = 5^n$. Докажите, что n четно.

6. Числа от 1 до 50 разбили на десять пятерок и в каждой пятерке выбрали среднее по величине число. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных чисел?

7. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взяли точку E. Когда точку C отразили относительно отрезка BE, она попала на среднюю линию прямоугольника, параллельную стороне AB. Найдите угол BED.

8. В волейбольном турнире участвовало несколько команд 7 и 6 классов (каждые две команды сыграли ровно один матч, ничьих в волейболе не бывает). Команд семиклассников было в пять раз меньше, чем команд шестиклассников, а побед семиклассники одержали в два раза меньше, чем шестиклассники. Сколько команд участвовало в турнире?

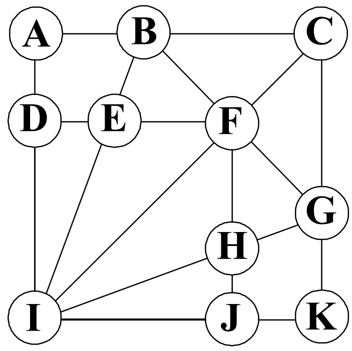
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 2.11.2006

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Поезд вышел со станции A, проследовал мимо станции B, затем C и прибыл на станцию D. Часть пути от A до C он прошел за 2 часа, а от B до D – за 3 часа. Расстояние от A до B — 100 км, от B до C — 60 км, от C до D — 180 км. Какое наименьшее время поезд мог потратить на весь путь, если известно, что он нигде не превышал скорость в 100 км/час?

2. На плоскости отмечены вершины большого квадрата и маленького квадрата, лежащего внутри большого. Большой квадрат разбит на треугольники с вершинами в отмеченных точках. Оказалось, что каждая отмеченная точка, лежащая внутри большого квадрата, является вершиной ровно четырёх треугольников разбиения. Докажите, что какая-то вершина большого квадрата принадлежит двум треугольникам разбиения.

3. В каждой клетке доски 4×4 стоит 0. Разрешается выбрать любые две клетки, соединенные ходом коня, и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа 1, 2, …, 16 (не обязательно идущие по порядку)?



4. Буквы A, B, …, K на рисунке обозначают числа 1, 2, …, 11 (разные буквы – разные числа) так, что суммы чисел во всех десяти отмеченных рядах из трех клеток одинаковы. Какие значения может принимать буква I?

5. a, b, c, n — натуральные числа такие, что $(a+4b)(b+4a) = 5^n$. Докажите, что n четно.

6. Числа от 1 до 30 разбили на десять троек, и в каждой тройке взяли наименьшее по величине число. Какое наибольшее значение может принимать сумма взятых чисел?

7. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взяли точку E. Когда точку C отразили относительно отрезка BE, она попала на среднюю линию прямоугольника, параллельную стороне AB. Найдите угол BED.

8. В волейбольном турнире участвовало несколько команд 7 и 6 классов (каждые две команды сыграли ровно один матч, ничьих в волейболе не бывает). Команд семиклассников было в пять раз меньше, чем команд шестиклассников, а побед семиклассники одержали в два раза меньше, чем шестиклассники. Сколько команд участвовало в турнире?

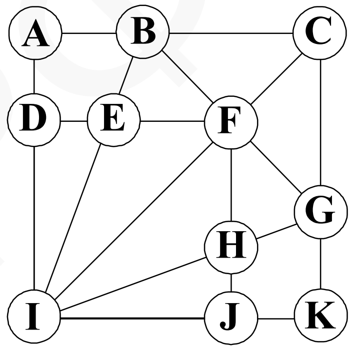
XXVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. НИЖНЕКАМСК, 31.10-06.11.2006

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 2.11.2006

ЛИГА «СТАРТ»

1. Заплатив 100 рублей, покупатель получил столько рублей сдачи, сколько он купил тетрадей. Сколько тетрадей мог купить покупатель, если известно, что тетрадь стоит четное число рублей?

2. В каждой клетке шахматной доски стоит 0. Разрешается выбрать любые две соседние (по стороне) клетки и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа 1, 2, …, 64?



3. Буквы A, B, …, K на рисунке обозначают числа 1, 2, …, 11 (разные буквы – разные числа) так, что суммы чисел во всех десяти отмеченных рядах из трех клеток одинаковы. Какие значения может принимать буква I?

4. Существует ли такое простое число, большее 100, которое при любой перестановке своих цифр остается простым?

5. Числа от 1 до 30 разбили на десять троек и в каждой тройке взяли наименьшее число. Какое наибольшее значение может принимать сумма взятых чисел?

6. Найдите наименьшее натуральное число, у которого есть делители, оканчивающиеся всеми цифрами, то есть делитель, оканчивающийся на 0, делитель, оканчивающийся на 1, …, делитель, оканчивающийся на 9.

7. В волейбольном турнире участвовали несколько команд седьмых и шестых классов (каждые две команды сыграли ровно один матч, ничьих в волейболе не бывает). Команд семиклассников было в пять раз меньше, чем команд шестиклассников, а побед семиклассники одержали в два раза меньше, чем шестиклассники. Сколько всего команд участвовало в турнире?

8. Каждая пятая семья города Нижнекамска, имеющая хотя бы одну кошку, также имеет и собаку (хотя бы одну). Каждая четвертая семья Нижнекамска, имеющая хотя бы одну собаку, также имеет и кошку. В каждой пятой семье Нижнекамска нет ни кошек, ни собак. Какая часть нижнекамских семей имеет и кошек, и собак?