XXVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. БЕЛОРЕЦК, 2-8.11.2005

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2005

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Сколько существует 100-значных чисел $\overline{a_1a_2\ldots a_{100}}$, остоящих из нечетных цифр, для которых $a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{99}a_{100}$ дает остаток 1 от деления на 4?

2. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 прямоугольников из трех клеток так, чтобы каждый прямоугольник имел ровно по одной общей вершине с двумя другими прямоугольниками, а с остальными прямоугольниками общих точек не имел?

3. Натуральные числа x и y таковы, что $k=\frac{4xy}{x+y}$ – целое нечетное число. Докажите, что у k есть хотя бы один натуральный делитель вида $4m+3$.

4. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – положительные числа. Докажите, что

$$\frac{2a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{2a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{2a_n^2}{a_n+a_1}\ge a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

5. Существует ли 2006-значное число, 2006-я степень которого оканчивается самим этим числом?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, M и N – середины сторон BC и AD. Прямая MN пересекается с лучом AB в точке P, а с лучом DC – в точке Q. Докажите, что $PB = QC$.

7. Все углы восьмиугольника $ABCDEFGH$ равны, причем расстояние между прямыми AB и EF равно расстоянию между прямыми CD и GH. Докажите, что $AB+EF = CD+GH$.

8. Квадрат 25×25 разбит на единичные квадратики. Разрешается обвести красным границу квадрата любого размера, не выходящего за границы большого квадрата. Какое наименьшее количество квадратов нужно обвести, чтобы все стороны всех единичных квадратиков оказались красными?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2005

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по модулю меньше 1 и $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 2005 + |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$. При каком наименьшем n это возможно?

2. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 прямоугольников из трех клеток так, чтобы каждый прямоугольник имел ровно по одной общей вершине с двумя другими прямоугольниками, а с остальными прямоугольниками общих точек не имел?

3. Натуральные числа x и y таковы, что $k = \frac{4xy}{x+y}$ – целое нечетное число. Докажите, что у k есть хотя бы один натуральный делитель вида $4m+3$.

4. d – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите,

что $a(d-b)+b(d-c)+c(d-a) \leq d^2$.

5. Существует ли 2006-значное число, 2006-я степень которого оканчивается самим этим числом?

6. Найдите все точные квадраты, которые при делении на 11 дают в частном простое число, а в остатке 4.

7. Все углы восьмиугольника $ABCDEFGH$ равны, причем расстояние между прямыми AB и EF равно расстоянию между прямыми CD и GH. Докажите, что $AB+EF = CD+GH$.

8. Квадрат 25×25 разбит на единичные квадратики. Разрешается обвести красным границу квадрата любого размера, не выходящего за границы большого квадрата. Какое наименьшее количество квадратов нужно обвести, чтобы все горизонтальные стороны всех единичных квадратиков оказались красными?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2005

ВТОРАЯ ЛИГА

1. Каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по модулю меньше 1 и $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n| = 2005+|x_1+x_2+\ldots+x_n|$. При каком наименьшем n это возможно?

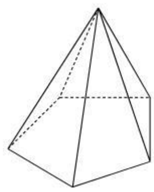
2. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 доминошек так, чтобы каждая доминошка имела ровно по одной общей вершине с двумя другими доминошками, а с остальными доминошками общих точек не имела?

3. Дана квадратная таблица $2k\times 2k$, в которой расставлены числа от 1 до $4k^2$: в первой строке числа от 1 до $2k$ слева направо, во второй – от $2k+1$ до $4k$ слева направо и т.д., в последней строке числа от $2k(2k–1)+1$ до $4k^2$. Таблица раскрашена в два цвета таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце одинаковое число клеточек каждого цвета. Докажите, что сумма чисел, стоящих в клеточках одного цвета, равна сумме чисел, стоящих в клеточках второго цвета. .

4. d – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что

$$a(d-b)+b(d-c)+c(d-a) \le d^2.$$

5. На пятиугольную пирамиду (см. рис.) село отдохнуть несколько пчел (пчела может сесть на грань, на ребро или в вершину). Две пчелы сесть в одну точку не могут. Оказалось, что на каждой грани количество пчел разное. Какое наименьшее число пчел могло прилететь?



6. Найдите все точные квадраты, которые при делении на 11 дают в частном простое число, а в остатке 4.

7. Все углы восьмиугольника $ABCDEFGH$ равны, причем расстояние между прямыми AB и EF равно расстоянию между прямыми CD и GH. Докажите, что $AB+EF = CD+GH$.

8. У Малыша и Карлсона был круглый торт. Карлсон провел два прямолинейных разреза, проходящие через центр торта. После этого Малыш сделал еще один прямолинейный разрез того же торта. Докажите, что одна из полученных частей имеет площадь не менее $\frac{1}{6}$ площади торта.

XXVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. БЕЛОРЕЦК, 2-8.11.2005

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2005

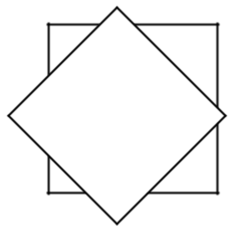
ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Сколько существует 100-значных чисел $\overline{a_1a_2\ a_{100}}$, состоящих из нечетных цифр, для которых $a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{99}a_{100}$ дает остаток 1 от деления на 4?

2. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 прямоугольников из трех клеток так, чтобы каждый прямоугольник имел ровно по одной общей вершине с двумя другими прямоугольниками, а с остальными прямоугольниками общих точек не имел?

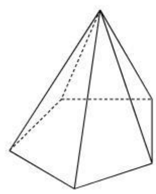
3. Дана квадратная таблица $2k\times2k$, в которой расставлены числа от 1 до $4k^2$: в первой строке числа от 1 до $2k$ слева направо, во второй – от $2k+1$ до $4k$ слева направо и т.д., в последней строке числа от $2k(2k-1)+1$ до $4k^2$. Таблица раскрашена в два цвета так, что в каждой строке и в каждом столбце одинаковое число клеточек каждого цвета. Докажите, что сумма чисел, стоящих в клеточках одного цвета, равна сумме чисел, стоящих в клеточках второго цвета.

4. Два картонных квадрата расположены под углом 45 градусов один над другим, как показано на рисунке. Докажите, что сумма длин закрытых частей горизонтальных сторон нижнего квадрата равна сумме длин закрытых частей его вертикальных сторон.



5. Имеются 13 внешне неразличимых золотых монет, одна из которых фальшивая. Кроме того, есть 2 серебряных монеты, внешне отличающихся от золотых, одна из которых фальшивая. Фальшивая серебряная монета весит столько же, сколько фальшивая золотая, а настоящая – столько же, сколько настоящая золотая, при этом фальшивые монеты весят меньше настоящих. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти обе фальшивых монеты?

6. На пятиугольную пирамиду (см. рис.) село отдохнуть несколько пчел (пчела может сесть на грань, на ребро или в вершину). Две пчелы сесть в одну точку не могут. Оказалось, что на каждой грани количество пчел разное. Какое наименьшее число пчел могло прилететь?



7. d – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите,

$$\text{что } a(d-b)+b(d-c)+c(d-a)\le d^2.$$

8. У Малыша и Карлсона был круглый торт. Карлсон провел два прямолинейных разреза, проходящие через центр торта. После этого Малыш сделал еще один прямолинейный разрез того же торта. Докажите, что одна из полученных частей имеет площадь не менее $\frac{1}{6}$ площади торта.

ягубов.рф

*XX*VI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. БЕЛОРЕЦК, 2-8.11.2005

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 8.11.2005

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Найдите все такие натуральные числа $\overline{a_1a_2\ldots a_{2n-1}a_{2n}}$, в записи которых четное количество цифр, что $\overline{a_1a_2\ldots a_{2n-1}a_{2n}} = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + \ldots + \overline{a_{2n-1}a_{2n}} + 2005$.

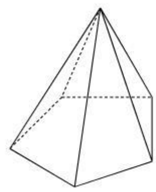
2. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 прямоугольников из двух клеток так, чтобы каждый прямоугольник имел ровно по одной общей вершине с двумя другими прямоугольниками, а с остальными прямоугольниками общих точек не имел?

3. Дана квадратная таблица 10×10, в которой расставлены числа от 1 до 100 так, что в первой строке стоят числа от 1 до 10 слева направо, во второй – от 11 до 20 слева направо и т.д., в последней строке – числа от 91 до 100. Таблица раскрашена в два цвета таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце одинаковое число клеточек каждого цвета. Докажите, что сумма чисел, стоящих в клеточках одного цвета, равна сумме чисел, стоящих в клеточках второго цвета. .

4. d – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что

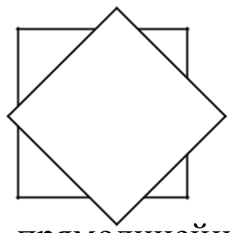
$$a(d-b)+b(d-c)+c(d-a) \le d^2.$$

5. На пятиугольную пирамиду (см. рис.) село отдохнуть несколько пчел (пчела может сесть на грань, на ребро или в вершину). Две пчелы сесть в одну точку не могут. Оказалось, что на каждой грани количество пчел разное. Какое наименьшее число пчел могло прилететь?



6. Существуют ли такие четные натуральные числа a, b, c, что $(a+b)^2+(a+c)^2=(b+c)^2$?

7. Два картонных квадрата расположены под углом 45 градусов один над другим, как показано на рисунке (их центры **не** совпадают). Докажите, что сумма длин закрытых частей горизонтальных сторон нижнего квадрата равна сумме длин закрытых частей его вертикальных сторон.



8. У Малыша и Карлсона был круглый торт. Карлсон провел два прямолинейных разреза, проходящие через центр торта. После этого Малыш сделал еще один прямолинейный разрез того же торта. Докажите, что одна из полученных частей имеет площадь не менее $\frac{1}{6}$ площади торта.