# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 5.11.2005

## ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** На Луне $n$ городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города A в город B – как стоимость проезда из A в B по самому дешевому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более $n$–1 различных цен.

**2**. Докажите, что если числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенству $y^3x+1 < x+y^3$, то $x^3y+1 < y+x^3$.

**3**. Точки $M$ и $N$ лежат на стороне $AB$, точка $P$ – на стороне $BC$ и точка $Q$ – на стороне $CA$ равностороннего треугольника $ABC$. Найдите угол между прямыми $MP$ и $NQ$, если известно, что $MA+AQ = NB+BP = AB$.

**4.** Дано 41 различное натуральное число, меньшее 1000. Известно, что среди любых трех из них есть два, дающих в произведении точный квадрат. Докажите, что среди этих чисел есть точный квадрат.

**5**. Решите в натуральных числах уравнение $3xyz–5yz+3x+3z = 5$.

**6.** При каких натуральных $m$ и $n$ клетки прямоугольника $m \times n$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой клетки было нечетное число соседних (т.е. имеющих с ней хотя бы одну общую вершину) клеток того же цвета?

**7**. $K$ – середина стороны $AB$ треугольника $ABC$, $BL$ – биссектриса угла $B$. Докажите, что если угол $\angle BLK = 90°$, то $AB = 3BC$.

8. Дано положительное число $\alpha < \frac{3}{2}$. Докажите, что среди чисел вида $[n\alpha]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, существует бесконечно много натуральных степеней двойки.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 5.11.2005

## ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** В стране 1000 городов, каждые два города соединены дорогой. Известно, что для каждых двух городов A и B на любом маршруте из A в B, проходящем через другие города, есть дорога не длиннее AB. Докажите, что в этой стране менее 1000 разных длин дорог.

**2.** Докажите, что если числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенству $y^3x+1 < x+y^3$, то $x^3y+1 < y+x^3$.

**3.** Точки $M$ и $N$ лежат на стороне $AB$, точка $P$ – на стороне $BC$ и точка $Q$ – на стороне $CA$ равностороннего треугольника $ABC$. Найдите угол между прямыми $MP$ и $NQ$, если известно, что $MA+AQ = NB+BP = AB$.

**4.** На острове Логика живут два племени: лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Кроме того, каждый житель острова – мужчина или женщина. Однажды два жителя острова, Али и Бали, сказали про себя следующие фразы. Али: «Мы оба лжецы». Бали: «Мы оба мужчины». Определите, к какому племени принадлежит каждый из аборигенов, и какого они пола.

**5**. Решите в натуральных числах уравнение $3xyz–5yz+3x+3z = 5$.

**6.** При каких натуральных $m$ и $n$ клетки прямоугольника $m \times n$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой клетки было нечетное число соседних (т.е. имеющих с ней хотя бы одну общую вершину) клеток того же цвета?

**7.** Дан прямоугольный треугольник $ABC$, в котором $\angle A = 90^\circ$. $BL$ – биссектриса угла $B$, а точка $K$ на стороне $BC$ такова, что $\angle BLK = 90^0$. Оказалось, что $3KC = 2(BC–AB)$. Найдите $\angle C$.

8. Дано четное число $a$. Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел $n$ таких, что $a^n+n$ – составное число.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 5.11.2005

## ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** На Луне 10 городов и 10 платных дорог, соединяющих некоторые из них, причем нет двух дорог, проезд по которым стоил бы одинаково. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость поездки между двумя городами определяется как стоимость самого дешевого пути между ними. Жители Луны очень экономны. Докажите, что хотя бы одну дорогу можно закрыть, потому что по ней никто не ездит.

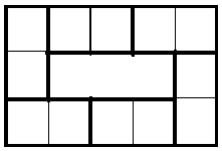
**2.** Докажите, что если числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенству $y^3x+1 < x+y^3$, то $x^3y+1 < y+x^3$.

**3.** Точки $M$ и $N$ лежат на стороне $AB$, точка $P$ – на стороне $BC$ и точка $Q$ – на стороне $CA$ равностороннего треугольника $ABC$. Найдите угол между прямыми $MP$ и $NQ$, если известно, что $MA+AQ = NB+BP = AB$.

**4.** Петька взял в долг у Василия Ивановича 28 рублей, обязуясь выплачивать долг в течение 4 месяцев. Каждый следующий месяц сумма выплаты должна расти, составлять целое число рублей и нацело делиться на сумму выплаты в предыдущем месяце. Какую сумму Петька выплатит в последний месяц?

**5.** Решите в натуральных числах уравнение $3xy - 2y+6x = 10$.

**6.** Дети удалили из комплекта домино дубли, после чего составили замкнутую цепь из шести доминошек, сложенных по правилам (см. рис.). Найдите наименьшее возможное количество точек на всех доминошках в сумме.



**7.** На острове Логика живут два племени: лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Кроме того, каждый житель острова – мужчина или женщина. Однажды два жителя острова, Али и Бали, сказали про себя следующие фразы. Али: «Мы оба лжецы». Бали: «Мы оба мужчины». Определите, к какому племени принадлежит каждый из аборигенов, и какого они пола.

**8.** Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел $n$ таких, что $4^n+n$ – составное число.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 5.11.2005

## ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

**1.** На Луне $n$ городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города А в город В – как стоимость проезда из А в В по самому дешевому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более $n$–1 различных цен.

**2.** Сумма цифр натурального числа $a$ относится к сумме цифр числа $2a$, как 19 к 9. Докажите, что в десятичной записи числа $a$ хотя бы 29 цифр.

**3.** Диаметр круглого стола равен 1 м. Стол состоит из двух частей, имеющих форму полукруга. Так как за стол надо было усадить много гостей, то половинки раздвинули и между ними вставили прямоугольный кусок размером 1 м × 0,5 м. Найдутся ли на новом столе две точки, расстояние между которыми превышает 1,5 м?

**4.** Петька взял в долг у Василия Ивановича 28 рублей, обязуясь выплачивать долг в течение 4 месяцев. Каждый следующий месяц сумма выплаты должна расти, составлять целое число рублей и нацело делиться на сумму выплаты в предыдущем месяце. Какую сумму Петька выплатит в последний месяц?

**5.** Решите в натуральных числах уравнение $3xyz–5yz+3x+3z = 5$.

**6.** Дети составили замкнутую цепь из восьми доминошек, сложенных по правилам. Найдите наименьшее возможное количество точек на всех доминошках в сумме.

**7.** На острове Логика живут два племени: лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Кроме того, каждый житель острова – мужчина или женщина. Однажды два жителя острова, Али и Бали, сказали про себя следующие фразы. Али: «Мы оба лжецы». Бали: «Мы оба мужчины». Определите, к какому племени принадлежит каждый из аборигенов, и какого они пола.

8. Дано четное число $a$. Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел $n$ таких, что $a^n+n$ – составное число.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 5.11.2005

## ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

**1.** На Луне 10 городов и 10 платных дорог, соединяющих некоторые из них, причем нет двух дорог, проезд по которым стоил бы одинаково. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость поездки между двумя городами определяется как стоимость самого дешевого пути между ними. Жители Луны очень экономны. Докажите, что хотя бы одну дорогу можно закрыть, потому что по ней никто не ездит.

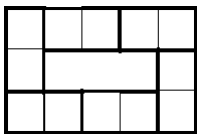
**2.** На трех карточках написаны цифры, из которых сложено трехзначное число. Затем карточки переложили так, что каждая карточка поменяла свое место. Получилось новое трехзначное число, которое в сумме с предыдущим дает 1000. Найдите оба трехзначных числа.

**3.** Диаметр круглого стола равен 1 м. Стол состоит из двух частей, имеющих форму полукруга. Так как за стол надо было усадить много гостей, то половинки раздвинули и между ними вставили прямоугольный кусок размером 1 м × 0,5 м. Найдутся ли на новом столе две точки, расстояние между которыми превышает 1,5 м?

**4.** Петька взял в долг у Василия Ивановича 19 рублей, обязуясь выплачивать долг в течение 4 месяцев. Каждый следующий месяц сумма выплаты должна расти, составлять целое число рублей и нацело делиться на сумму выплаты в предыдущем месяце. Какую сумму Петька выплатит в последний месяц?

**5.** Решите в натуральных числах уравнение $3xy - 5x + 3y = 1$.

**6.** Дети удалили из комплекта домино дубли, после чего составили замкнутую цепь из шести доминошек, сложенных по правилам (см. рис.). Найдите наименьшее возможное количество точек на всех доминошках в сумме.



**7.** На острове Логика живут два племени: лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Кроме того, каждый житель острова – мужчина или женщина. Однажды два жителя острова, Али и Бали, сказали про себя следующие фразы. Али: «Мы оба лжецы». Бали: «Мы оба мужчины». Определите, к какому племени принадлежит каждый из аборигенов, и какого они пола.

**8.** Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел $n$ таких, что $2^n+n$ – составное число.