

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 4.11.2005

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На доске были написаны несколько первых натуральных чисел. Когда одно из чисел стерли, среднее арифметическое оставшихся оказалось равно $45/4$. Какое число стерли?
2. Решите в натуральных числах уравнение $5^x - 3^y = 16$.
3. Камни, сложенные в n куч, собрали и разложили в $n + k$ куч ($k > 0$). Докажите, что не менее $k + 1$ камней оказались в меньших кучах, чем те, в которых они лежали раньше.
4. Семь различных целых чисел таковы, что сумма любых трех из них меньше суммы четырех остальных. Докажите, что все числа не меньше 10.
5. В пять 15-литровых ведер налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается утроить количество воды в любом сосуде, перелив в него воду из другого. Какое наибольшее количество воды можно такими действиями собрать в одном ведре?
6. Дан квадрат. Проведены 4 прямые, которые разрезают его на несколько частей, одна из которых – восьмиугольник. Докажите, что в этом восьмиугольнике нет острых углов.
7. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ с попарно различными сторонами наружу построены правильные треугольники с центрами S_1, S_2, S_3, S_4 (центры перечислены в порядке обхода сторон четырехугольника). Докажите, что если диагонали $ABCD$ равны, то S_1S_3 перпендикулярно S_2S_4 .
8. S – 2005-элементное множество, n – целое число, $0 \leq n \leq 2^{2005}$. Докажите, что все подмножества S можно раскрасить в черный и белый цвета с соблюдением следующих условий:
 - (а) объединение любых двух белых подмножеств – белое;
 - (б) объединение любых двух черных подмножеств – черное;
 - (в) белых подмножеств ровно n .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 4.11.2005

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске были написаны несколько первых натуральных чисел. Когда одно из чисел стерли, среднее арифметическое оставшихся оказалось равно $45/4$. Какое число стерли?
2. Решите в натуральных числах уравнение $5^x - 3^y = 16$.
3. Камни, сложенные в две кучи, собрали и разложили в три кучи. Докажите, что не менее двух камней оказались в меньших кучах, чем те, в которых они лежали раньше.
4. Семь различных целых чисел таковы, что сумма любых трех из них меньше суммы четырех остальных. Докажите, что все числа не меньше 10.
5. В 15-литровые ведра налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается перелить из любого ведра в любое другое вдвое больше воды, чем в нем уже есть. Можно ли собрать всю воду в одном ведре?
6. Дан квадрат. Проведены 4 прямые, которые разрезают его на несколько частей, одна из которых – восьмиугольник. Докажите, что в этом восьмиугольнике нет острых углов.
7. Углы при основании трапеции не равны. Докажите, что диагональ, выходящая из меньшего угла, больше другой диагонали.
8. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого использованы только цифры 3, 7 и 9, и которое делится на 3, на 7 и на 9. Не обязательно использовать каждую цифру.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 4.11.2005

ВТОРАЯ ЛИГА

1. На доске были написаны несколько первых натуральных чисел. Когда одно из чисел стерли, сумма оставшихся оказалась равна 89. Какое число стерли?
2. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - 3^y = 16$.
3. Камни, сложенные в две кучи, собрали и разложили в три кучи. Докажите, что не менее двух камней оказались в меньших кучах, чем те, в которых они лежали раньше.
4. Семь чисел таковы, что сумма любых трех из них меньше суммы четырех остальных. Докажите, что все числа положительны.
5. В 15-литровые ведра налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается перелить из любого ведра в любое другое вдвое больше воды, чем в нем уже есть. Можно ли собрать всю воду в одном ведре?
6. Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Существует ли невыпуклый пятиугольник, внутри которого есть точка, находящаяся на равных расстояниях от всех прямых, содержащих стороны этого пятиугольника?
7. Шахматный король попал с поля $b5$ на поле $g2$, сделав наименьшее возможное число ходов. Сколькими способами он мог это сделать?
8. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого использованы только цифры 3, 7 и 9, и которое делится на 3, на 7 и на 9. Не обязательно использовать каждую цифру.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 4.11.2005

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. На доске были написаны несколько первых натуральных чисел. Когда одно из чисел стерли, среднее арифметическое оставшихся чисел оказалось равно 6,4. Какое число стерли?
2. Решите в натуральных числах уравнение $5^x - 3^y = 16$.
3. Камни, сложенные в n куч, собрали и разложили в $n + 1$ кучу. Докажите, что не менее двух камней оказались в меньших кучах, чем те, в которых они лежали раньше.
4. Семь различных целых чисел таковы, что сумма любых трех из них меньше суммы четырех остальных. Докажите, что все числа не меньше 10.
5. В 15-литровые ведра налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров. Разрешается перелить из любого ведра в любое другое вдвое больше воды, чем в нем уже есть. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одном ведре?
6. Две прямые разрезают правильный треугольник на несколько частей, одна из которых – пятиугольник. Докажите, что все углы в этом пятиугольнике не меньше 60° .
7. Шахматный король попал с поля $b5$ на поле $h2$, сделав наименьшее возможное число ходов. Сколькими способами он мог это сделать?
8. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого использованы только цифры 3, 7 и 9, и которое делится на 3, на 7 и на 9. Не обязательно использовать каждую цифру.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 4.11.2005

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. На доске были написаны несколько первых натуральных чисел. Когда одно из чисел стерли, сумма оставшихся оказалась равна 89. Какое число стерли?
2. Найдите все такие целые x , для которых $x^3 - x^2$ является степенью двойки.
3. Камни, сложенные в две кучи, собрали и разложили в три кучи. Докажите, что хотя бы один камень оказался в меньшей куче, чем та, в которой он лежал раньше.
4. Семь чисел таковы, что сумма любых трех из них меньше суммы четырех остальных. Докажите, что все числа положительны.
5. В 15-литровые ведра налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров. Разрешается перелить из любого ведра в любое другое вдвое больше воды, чем в нем уже есть. Можно ли собрать всю воду в одном ведре?
6. Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Существует ли невыпуклый пятиугольник, внутри которого есть точка, находящаяся на равных расстояниях от всех прямых, содержащих стороны этого пятиугольника?
7. Шахматный король попал с поля $b5$ на поле $g2$, сделав наименьшее возможное число ходов. Сколькими способами он мог это сделать?
8. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого использованы только цифры 3, 7 и 9, и которое делится на 3, на 7 и на 9. Не обязательно использовать каждую цифру.