XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2.12.2004

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Решите ребус $\overline{ABC}\cdot\overline{AD}=\overline{ADDC}$. Как обычно, одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры.

2. Разбейте прямоугольник на 9 прямоугольников так, чтобы ни из каких двух прямоугольников разбиения нельзя было сложить прямоугольник.

3. В треугольнике ABC проведена медиана AM. На ней выбрана точка P такая, что $PC = CM$ и $\angle PCM = \angle ABC$. Докажите, что BP не может быть биссектрисой угла B.

4. Сумма четырех ненулевых чисел равна 0. Сумма кубов этих чисел тоже равна 0. Докажите, что сумма 2005-х степеней этих чисел тоже равна 0.

5. Существует ли бесконечная последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ такая, что $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ для каждого натурального n?

6. Несколько костяшек домино выложили в ряд (по правилам игры в домино). Докажите, что полный набор костяшек можно выложить в ряд (по правилам) так, что выложенные ранее костяшки шли в нем в том же порядке (может быть, не подряд).

7. В треугольнике ABC BD и CE – биссектрисы, $\angle ADE - \angle AED = 60°$. Докажите, что $\angle ACB = 120°$.

XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2.12.2004

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. В коробке лежат несколько (больше трёх) шариков. Каждый покрашен в какой-то цвет. Если достать из коробки любые три шарика, то среди них обязательно будет хотя бы один красный и хотя бы один синий. Сколько шариков может быть в коробке?

2. Решите ребус $\overline{ABC}\cdot\overline{AD}=\overline{ADDC}$. Как обычно, одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры.

3. Разбейте прямоугольник на 9 прямоугольников так, чтобы ни из каких двух прямоугольников разбиения нельзя было сложить прямоугольник.

4. Найдите наименьшее число, записываемое только нулями и единицами и делящееся на 81.

5. На берегу моря стоит одноэтажный отель, в котором 20 комнат с окнами на море. Постоялец может занимать либо две соседние комнаты в течение одного дня, либо одну комнату в течение двух дней. Комната стоит 1 гульден в день. Согласно книге посетителей, в первый день сезона комната №1 была свободна, а в последний, сотый день сезона свободна была комната №20. Докажите, что выручка отеля за сезон не превзошла 1996 гульденов.

6. В треугольнике ABC проведена медиана AM. На ней выбрана точка P такая, что $PC = CM$ и $\angle PCM = \angle ABC$. Докажите, что BP не может быть биссектрисой угла B.

XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2.12.2004

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Найдите все решения ребуса НИЖНИЙ + ТАГИЛ = ТУРНИР. Как обычно, одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными – разные.

2. Из картона вырезано несколько прямоугольников. На плоскости нарисован квадрат, сторона которого не меньше любой стороны любого из прямоугольников, а периметр не меньше суммы периметров прямоугольников. Докажите, что все прямоугольники можно без наложений разместить в квадрате.

3. На каждой грани куба поставлено натуральное число. В каждой вершине этого куба поставлено произведение чисел на примыкающих к этой вершине гранях. Сумма всех чисел в вершинах оказалась равна 1001. Чему может быть равна сумма всех чисел на гранях?

4. Каждый из n человек взял по листку бумаги, и каждый записал на своем листке несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 100. Оказалось, что если взять любые два листка, то найдется число, написанное на одном листке, и не написанное на другом, а все числа, написанные на обоих листках, если они есть, составляют какой-либо начальный отрезок натурального ряда. Каково наибольшее возможное значение n?

5. Точки M, N – середины сторон AD, BC прямоугольника $ABCD$ соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает диагональ AC в точке Q, а луч DC – в точке P. Докажите, что $\angle QNC = \angle PNC$.

XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2.12.2004

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Найдите все решения ребуса НИЖНИЙ + ТАГИЛ = ТУРНИР. Как обычно, одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными – разные.

2. В шеренгу выстроились100 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Первый сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 1», второй сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 2» и т.д., вплоть до сотого, который сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 100». Сколько в шеренге рыцарей?

3. Из картона вырезано несколько прямоугольников. На плоскости нарисован квадрат, сторона которого не меньше любой стороны любого из прямоугольников, а периметр не меньше суммы периметров прямоугольников. Докажите, что все прямоугольники можно без наложений разместить в квадрате.

4. На каждой грани куба поставлено натуральное число. В каждой вершине этого куба поставлено произведение чисел на примыкающих к этой вершине гранях. Сумма всех чисел в вершинах оказалась равна 1001. Чему может быть равна сумма всех чисел на гранях?

5. Каждый из n человек взял по листку бумаги, и каждый записал на своем листке несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 100. Оказалось, что если взять любые два листка, то найдется число, написанное на одном листке, и не написанное на другом, а все числа, написанные на обоих листках, если они есть, составляют какой-либо начальный отрезок натурального ряда. Каково наибольшее возможное значение n?

XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2.12.2004

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Пять лет назад Таня была в 6 раз младше матери, а через 15 лет она будет вдвое младше матери. Сколько лет Тане сейчас?

2. Найдите все решения ребуса НИЖНИЙ + ТАГИЛ = ТУРНИР. Как обычно, одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными – разные.

3. В шеренгу выстроились100 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Первый сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 1», второй сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 2» и т.д., вплоть до сотого, который сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 100». Сколько в шеренге рыцарей?

4. Из картона вырезано несколько прямоугольников. На плоскости нарисован квадрат, сторона которого не меньше любой стороны любого из прямоугольников, а периметр не меньше суммы периметров прямоугольников. Докажите, что все прямоугольники можно без наложений разместить в квадрате.

5. Можно ли разложить 100 камешков в 10 куч так, чтобы во всех кучах было по разному количеству камешков, но после любого разделения любой кучи на две меньших это свойство нарушалось?

ЛУБОВ.РФ

XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

Решения задач командной олимпиады старшей группы.

Задача 1. *Решите ребус* $\overline{ABC}\cdot\overline{AD}=\overline{ADDC}$. *Как обычно, одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры.*

Ответ: Два решения: 109·19 = 1995 и 104·16 = 1664. Решение. Заметим, что $\overline{ADDC}=\overline{AD00}+\overline{DC}=\overline{AD}(100+\overline{DC}:\overline{AD})$, откуда $A=1$, $B=0$ и $\overline{DC}=\overline{1D}\cdot C$. Последнее равенство можно переписать в виде $10D+C=(10+D)\ C \Leftrightarrow 10(D-C)=C(D-1)$. Получается, что произведение $C(D-1)$ делится на 5, то есть либо $C=0$, либо $C=5$, либо $D=1$, либо $D=6$. Случаи $C=0$ и $D=1$ невозможны, ибо тогда $C=B$ или $D=A$. Если $C=5$, то $D=9$, что дает первое решение. Если $D=6$, то $C=4$, что дает второе решение.

Задача 2. *Разбейте прямоугольник на 9 прямоугольников так, чтобы ни из каких двух прямоугольников разбиения нельзя было сложить прямоугольник.*

Решение. Вот один из бесконечного числа возможных примеров. Возьмем квадрат 10×10 и отрежем от него четыре прямоугольника размерами 8×1 (верхний), 2×6 (правый), 7×4 (нижний) и 3×9 (левый) (рис. 1). От оставшегося внутри квадрата 5×5 отрежем по той же схеме прямоугольники размерами 4,8×0,1 (верхний), 0,2×4,6 (правый), 4,7×0,4 (нижний) и 0,3×4,9 (левый). Внутри останется квадрат 4,5×4,5.

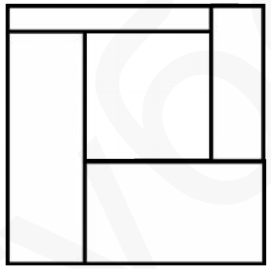


Рис. 1

Задача 3. *В треугольнике ABC проведена медиана AM. На ней выбрана точка P такая, что PC = CM и ∠PCM = ∠ABC. Докажите, что BP не может быть биссектрисой угла B.*

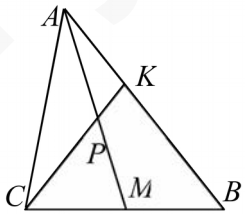


Рис. 2

Решение. Положим $\angle ABC=\angle PCM=\angle PMC=\alpha$. Тогда $\angle PMB=2\alpha$, а $\angle MPB=\angle PBM=90°-\alpha$. Значит, $\angle CPB=\alpha+(90°-\alpha)=90°$. Пусть BP – биссектриса. В треугольнике PCB она еще и высота, а потому – и медиана. Получается, что $CP=PK$, то есть PM – средняя линия в треугольнике CKB. Но это невозможно, ибо прямые PM и KB пересекаются в точке A.

Задача 4. *Сумма четырех ненулевых чисел равна 0. Сумма кубов этих чисел тоже равна 0. Докажите, что сумма 2005-х степеней этих чисел тоже равна 0.*

Решение. $a+b+c+d=0 \Leftrightarrow a+b=-(c+d) \Leftrightarrow (a+b)^3=-(c+d)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=-c^3-d^3-3c^2d-3cd^2 \Rightarrow ab(a+b)=-cd(c+d) \Rightarrow k(ab-cd)=0$, где $k=a+b=-(c+d)$. Если $k=0$, то $a=-b$, $c=-d$, и утверждение задачи очевидно. В противном случае $ab=cd$. Положим $x=a/c=d/b$. Тогда $a=cx$, $d=bx$, и $a+b+c+d=0 \Leftrightarrow (b+c)(x+1)=0$, откуда $b+c=0$ или $x=1$. В первом случае $b=-c$ и $a=-d$. Во втором случае $a=c$ и $d=b$, откуда $a=-c$ и $b=-d$. В обоих случаях утверждение задачи очевидно.

Задача 5. *Существует ли бесконечная последовательность простых чисел* $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ *такая, что* $|p_{n+1}-2p_n|=1$ *для каждого натурального n?*

Ответ: Нет. Решение. Допустим, искомая последовательность существует. Заметим, что $|p_{n+1}-2p_n|=1 \Leftrightarrow p_{n+1}=2p_n\pm1$. Из этого, поскольку $p_1>1$, следует, что $p_1<p_2<p_3<\ldots$. Поэтому $p_3>3$. Пусть $p_3=3k+1$. Тогда число $2p_3+1$ делится на 3. Поэтому $p_4=2p_3-1$. Аналогично показывается, что в этом случае $p_{n+1}=2p_n-1 \Leftrightarrow p_{n+1}-1=2(p_n-1)$ при всех $n\geq3$. Из последнего равенства следует, что $p_{n+3}-1=2^n(p_3-1) \Leftrightarrow p_{n+3}=2^np_3-(2^n-1)$. Поскольку p_3 – простое число, большее 2, найдется такое n, что 2^n-1 делится на p_3. Но тогда на p_3 делится и число p_{n+3} – противоречие. Если же $p_3=3k+2$, то нетрудно показать, что при всех n выполнено равенство $p_{n+1}=2p_n+1$, откуда $p_{n+3}=2^np_3+(2^n-1)$ с тем же противоречием.

Задача 6. *Несколько костяшек домино выложили в ряд (по правилам игры в домино). Докажите, что полный набор костяшек можно выложить в ряд (по правилам) так, что выложенные ранее костяшки шли в нем в том же порядке (может быть, не подряд).*

Решение. Будем прикладывать оставшиеся костяшки к уже выложенным. Если так не удалось выложить все костяшки, будем выкладывать оставшиеся в новые цепочки, пока костяшки не кончатся. Мысленно разделим все кости на половинки. Получится по 8 половинок каждого из семи достоинств от 0 («пусто») до 6. Назовем половинки на концах цепочек *крайними*, а остальные – *средними*. Поскольку средние половинки делятся на пары, состоящие из половинок одного достоинства, средних половинок каждого достоинства – четное число. Стало быть, крайних – тоже. Пусть концы какой-то из цепочек – разного достоинства. Тогда найдутся еще крайние половинки тех же достоинств, и мы сможем соединить нашу цепочку с какой-то другой. В противном случае у каждой цепочки – одинаковые крайние половинки, а у разных цепочек – разные. Тогда на любые две одинаковые крайние половинки найдутся шесть средних того же достоинства. Возьмем цепочку, у которой на концах половинки достоинством a. Если такие половинки есть внутри другой цепочки, вставим между ними нашу. Если же все они – внутри нашей цепочки, то там есть и половинки всех остальных достоинств (от костей вида (a,b)), и внутрь нее можно вставить любую другую. Уменьшая таким образом число цепочек, мы в итоге соединим все их в одну.

7. *В треугольнике ABC BD и CE – биссектрисы, $\angle ADE - \angle AED = 60°$. Докажите, что $\angle ACB = 120°$.*

Решение. Положим $\angle AED = x$. Тогда $\angle CAB = 120° - 2x$. Пусть угол ACB меньше 120°. Тогда биссектриса угла XCE проходит внутри угла XCA и не пересекается с отрезком BD. С другой стороны, в этом случае $\angle AEC = 60° + 2x - \angle ACE > 2x$, и биссектриса угла AEC, проходя внутри угла CED, пересекает отрезок BD. Но биссектриса внутреннего угла B треугольника BCE должна пересекаться с биссектрисами его внешних углов XCE и AEC в одной точке. Противоречие. Аналогично доказывается, что невозможно, чтобы $\angle ACB$ был больше 120°.

Решения задач командной олимпиады младшей группы.

Задача 1. *В коробке лежат несколько (больше трёх) шариков. Каждый покрашен в какой-то цвет. Если достать из коробки любые три шарика, то среди них обязательно будет хотя бы один красный и хотя бы один синий. Сколько шариков может быть в коробке?*

Ответ: 4. Решение. В коробке не больше, чем по два красных и синих шарика (иначе можно было бы достать три красных или три синих) и не больше одного шарика других цветов (иначе можно было бы достать один синий или красный шарик и два шарика других цветов). Получается, что шариков в коробке не больше пяти, причем если их пять, то среди них по два синих и красных и один – какого-то третьего цвета. Но тогда мы можем достать шарик третьего цвета и два синих. Значит, пяти шариков в коробке быть не может. Стало быть, их там четыре: два синих и два красных.

Задача 2 *такова же, как задача 1 для 8 класса.*

Задача 3 *такова же, как задача 2 для 8 класса.*

Задача 4. *Найдите наименьшее число, записываемое только нулями и единицами и делящееся на 81.*

Ответ: 1111111101. Решение. Количество единиц в искомом числе должно делиться на 9. Число 111111111 на 81 не делится. Перебирая по порядку десятизначные числа из девяти единиц и одного нуля, находим ответ.

Задача 5. *В одноэтажном отеле 20 комнат. Постоялец может занимать либо две соседние комнаты в течение одного дня, либо одну комнату в течение двух дней. Комната стоит 1 гульден в день. Согласно книге посетителей, в первый день сезона комната №1 была свободна, а в последний, сотый день сезона свободна была комната №20. Докажите, что выручка отеля за сезон не превзошла 1996 гульденов.*

Решение. Нарисуем таблицу размером 20×100 клеток, где строки соответствуют дням сезона, а столбцы – комнатам отеля. Двум гульденам, уплаченным постояльцем, соответствует вертикальная или горизонтальная «доминошка» из двух соседних клеток таблицы. Раскрасим клетки таблицы в два цвета в шахматном порядке. Левая верхняя и правая нижняя клетки будут одноцветными. По условию они не покрыты доминошками. Поскольку каждая доминошка покрывает две

разноцветных клетки, непокрытых клеток на доске будет не меньше четырех, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 6 *такова же, как задача 3 для 8 класса.*

Ягубов.РФ

XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

Решения задач личной олимпиады 8 класса.

Задача 1. *Найдите все решения ребуса:*

НИЖНИЙ + ТАГИЛ = ТУРНИР.

Как обычно, одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными – разные.

Ответ: Решений нет. Решение. Запишем пример «в столбик». Из сложения десятков следует, что либо $И+И$, либо $И+И+1$ заканчивается на $И$. В первом случае $И = 0$, во втором – $И = 9$. Если $И = 0$, то, складывая сотни, получаем, что $Н+Г$ оканчивается на $Н$, откуда $Г = И = 0$. Если $И = 9$, то $Н+Г$ оканчивается на $Н–1$, откуда $Г = И = 9$. Противоречие.

Задача 2. *Из картона вырезано несколько прямоугольников. На плоскости нарисован квадрат, сторона которого не меньше любой стороны любого из прямоугольников, а периметр не меньше суммы периметров прямоугольников. Докажите, что все прямоугольники можно без наложений разместить в квадрате.*

Решение. У каждого прямоугольника отметим наименьшую сторону. Сумма отмеченных сторон не больше четверти суммы периметров прямоугольников, то есть не больше стороны квадрата. Поэтому достаточно все прямоугольники выложить друг за другом, приложив их короткими сторонами к одной из сторон квадрата.

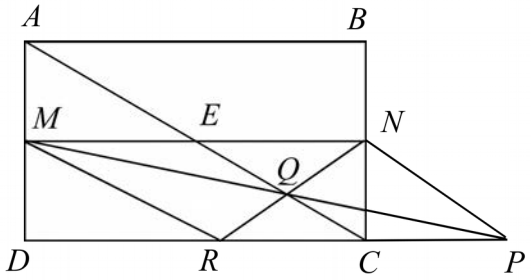
Задача 3. *На каждой грани куба поставлено натуральное число. В каждой вершине этого куба поставлено произведение чисел на примыкающих к этой вершине гранях. Сумма всех чисел в вершинах оказалась равна 1001. Чему может быть равна сумма всех чисел на гранях?*

Ответ: 31. Решение. Пусть на трех парах противоположных граней написаны числа a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 соответственно. Легко показать, что сумма всех чисел в вершинах равна $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$. При этом все суммы в скобках больше 1. Есть только один способ разложить число 1001 на три натуральных множителя, больших 1: $7\cdot11\cdot13$. Поэтому сумма всех чисел на гранях равна $7+11+13 = 31$.

Задача 4. *Каждый из n человек взял по листку бумаги, и каждый записал на своем листке несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 100. Оказалось, что если взять любые два листка, то найдется число, написанное на одном листке, и не написанное на другом, а все числа, написанные на обоих листках, если они есть, составляют какой-либо начальный отрезок натурального ряда. Каково наибольшее возможное значение n?*

Ответ: 100. Решение. Заметим, что наибольшие числа на любых двух листках должны быть различными (иначе наборы чисел, записанные на этих листках, совпадали бы). Поэтому листков не может быть больше 100. Ровно 100 листков может быть, если на одном написано только число 1, на втором – 1, 2, …, на сотом – 1, 2, …, 100.

Задача 5. *Точки M, N – середины сторон AD, BC прямоугольника ABCD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает диагональ AC в точке Q, а луч DC – в точке P. Докажите, что ∠QNC = ∠PNC.*



Решение. Продолжим отрезок NQ до пересечения с прямой CD в точке R. Точка E пересечения диагонали AC со средней линией MN – середина основания трапеции $MNPR$, Q – точка пересечения ее диагоналей. Как известно, в такой ситуации прямая EQ делит пополам второе основание RP. Таким образом, NC – высота и медиана, а, стало быть, и биссектриса в треугольнике RNP, что и требовалось доказать.

XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

Решения задач личной олимпиады 7 класса.

Задача 1. *Найдите все решения ребуса:*

НИЖНИЙ + ТАГИЛ = ТУРНИР.

Как обычно, одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными – разные.

Ответ: Решений нет. Решение. Запишем пример «в столбик». Из сложения десятков следует, что либо $И+И$, либо $И+И+1$ заканчивается на $И$. В первом случае $И = 0$, во втором – $И = 9$. Если $И = 0$, то, складывая сотни, получаем, что $Н+Г$ оканчивается на $Н$, откуда $Г = И = 0$. Если $И = 9$, то $Н+Г$ оканчивается на $Н–1$, откуда $Г = И = 9$. Противоречие.

Задача 2. *В шеренгу выстроились100 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Первый сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 1», второй сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 2» и т.д., вплоть до сотого, который сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 100». Сколько в шеренге рыцарей?*

Ответ: 0 или 10. Решение. Если в шеренге k ($k > 0$) рыцарей, то правду сказали в точности k-ый, $2k$-ый, …, mk-ый рыцари, где m – (неполное) частное от деления 100 на k. Поскольку $m = k$, то $k = 10$ (при $k = 9$ $m = 11$, при $k = 11$ $m = 9$). Случай, когда все в шеренге – лжецы, тоже подходит: поскольку на 0 не делится ни одно натуральное число, все они солгали.

Задача 3. *Из картона вырезано несколько прямоугольников. На плоскости нарисован квадрат, сторона которого не меньше любой стороны любого из прямоугольников, а периметр не меньше суммы периметров прямоугольников. Докажите, что все прямоугольники можно без наложений разместить в квадрате.*

Решение. У каждого прямоугольника отметим наименьшую сторону. Сумма отмеченных сторон не больше четверти суммы периметров прямоугольников, то есть не больше стороны квадрата. Поэтому достаточно все прямоугольники выложить друг за другом, приложив их короткими сторонами к одной из сторон квадрата.

Задача 4. *На каждой грани куба поставлено натуральное число. В каждой вершине этого куба поставлено произведение чисел на примыкающих к этой вершине гранях. Сумма всех чисел в вершинах оказалась равна 1001. Чему может быть равна сумма всех чисел на гранях?*

Ответ: 31. Решение. Пусть на трех парах противоположных граней написаны числа a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 соответственно. Легко показать, что сумма всех чисел в вершинах равна $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$. При этом все суммы в скобках больше 1. Есть только один способ разложить число 1001 на три натуральных множителя, больших 1: $7\cdot11\cdot13$. Поэтому сумма всех чисел на гранях равна $7+11+13 = 31$.

Задача 5. *Каждый из n человек взял по листку бумаги, и каждый записал на своем листке несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 100. Оказалось, что если взять любые два листка, то найдется число, написанное на одном листке, и не написанное на другом, а все числа, написанные на обоих листках, если они есть, составляют какой-либо начальный отрезок натурального ряда. Каково наибольшее возможное значение n?*

Ответ: 100. Решение. Заметим, что наибольшие числа на любых двух листках должны быть различными (иначе наборы чисел, записанные на этих листках, совпадали бы). Поэтому листков не может быть больше 100. Ровно 100 листков может быть, если на одном написано только число 1, на втором – 1, 2, …, на сотом – 1, 2, …, 100.

XXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
НИЖНИЙ ТАГИЛ, 1-7.12.2004

Решения задач личной олимпиады 6 класса.

Задача 1. *Пять лет назад Таня была в 6 раз младше матери, а через 15 лет она будет вдвое младше матери. Сколько лет Тане сейчас?*

Ответ: 10. Решение. Пусть Тане сейчас x лет, а маме – y лет. По условию $y-5 = 6(x-5)$, а $y+15 = 2(x+15)$. Вычитая из второго уравнения первое и решая полученное уравнение, находим, что $x = 10$.

Задача 2. *Найдите все решения ребуса:*

НИЖНИЙ + ТАГИЛ = ТУРНИР.

Как обычно, одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными – разные.

Ответ: Решений нет. Решение. Запишем пример «в столбик». Из сложения десятков следует, что либо $И+И$, либо $И+И+1$ заканчивается на $И$. В первом случае $И = 0$, во втором – $И = 9$. Если $И = 0$, то, складывая сотни, получаем, что $Н+Г$ оканчивается на $Н$, откуда $Г = И = 0$. Если $И = 9$, то $Н+Г$ оканчивается на $Н-1$, откуда $Г = И = 9$. Противоречие.

Задача 3. *В шеренгу выстроились100 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Первый сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 1», второй сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 2» и т.д., вплоть до сотого, который сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 100». Сколько в шеренге рыцарей?*

Ответ: 0 или 10. Решение. Если в шеренге k ($k > 0$) рыцарей, то правду сказали в точности k-ый, $2k$-ый, …, mk-ый рыцари, где m – (неполное) частное от деления 100 на k. Поскольку $m = k$, то $k = 10$ (при $k = 9$ $m = 11$, при $k = 11$ $m = 9$). Случай, когда все в шеренге – лжецы, тоже подходит: поскольку на 0 не делится ни одно натуральное число, все они солгали.

Задача 4. *Из картона вырезано несколько прямоугольников. На плоскости нарисован квадрат, сторона которого не меньше любой стороны любого из прямоугольников, а периметр не меньше суммы периметров прямоугольников. Докажите, что все прямоугольники можно без наложений разместить в квадрате.*

Решение. У каждого прямоугольника отметим наименьшую сторону. Сумма отмеченных сторон не больше четверти суммы периметров прямоугольников, то есть не больше стороны квадрата. Поэтому достаточно все прямоугольники выложить друг за другом, приложив их короткими сторонами к одной из сторон квадрата.

Задача 5. *Можно ли разложить 100 камешков в 10 куч так, чтобы во всех кучах было по разному количеству камешков, но после любого разделения любой кучи на две меньших это свойство нарушалось?*

Ответ: Можно. Пример. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.