XV УРАЛЬСКИЙ (VIII КИРОВСКИЙ) ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

17–23 МАРТА 2000 ГОДА

КИРОВ

XV УРАЛЬСКИЙ (VIII КИРОВСКИЙ) ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2000

Правила “Математической карусели”

Математическая карусель – это командное соревнования по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах – исходном и зачетном, но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение судье. Если оно верное, игрок №1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, решение предъявляет судье игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный, а на зачетном возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного переходит на исходный. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. И на исходном, и на зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной.

После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задача начинает решаться тогда, когда этот участник там появляется.

За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если

а) кончилось время, или

б) кончились задачи на зачетном рубеже, или

в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговаривается.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

Математическая карусель
младшие классы

1.(исх.) Сколько среди тысячи первых натуральных чисел таких, в записи которых встречаются три одинаковые цифры?

2.(исх.) Сколько точных квадратов содержится в множестве чисел вида 2^n+4^n, где $n\in N$?

3.(исх.) Найдите все трехзначные числа, составленные из четных цифр и делящиеся на их произведение.

4.(исх.) На какие цифры может оканчиваться сумма $1+2+3+...+n$? $(n\in N)$ Перечислите все варианты.

5.(исх.) Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести на последнее место, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите первоначальное число.

6.(исх.) Из различных фигур пентамино (фигуры из 5 клеток) составьте прямоугольник наименьшей площади. (Надо использовать больше одной фигурки).

7.(исх.) Сколько произведений, кратных десяти, можно образовать из чисел 2, 3, 5, 5, 7, 9?

8.(исх.) После того, как туристы прошли 1 км, а затем половину оставшегося пути, им осталось пройти треть всего пути и 1 км. Чему равен весь путь?

9.(исх.) Какое наибольшее число сторон может иметь фигура, являющаяся общей частью треугольника и выпуклого четырехугольника? (Привести пример)

10.(исх.) Расшифруйте ребус ** + *** = ****, если известно, что оба слагаемых и сумма не изменятся, если прочитать их справа налево.

11.(исх.) Несколько тракторов вспахивают поле в 300 га за целое число дней, причем каждый трактор за день вспахивает ровно 15 га. Сколько тракторов потребуется дополнительно, чтобы это же поле можно было вспахать на 6 дней раньше?

12.(исх.) Найдите наибольший общий делитель всех четырехзначных чисел, записанных при помощи цифр 3, 4, 5, 6.

13.(исх.) Если в трехзначном числе с различными ненулевыми цифрами сложить все возможные двузначные числа, образованные из цифр этого числа, то получится число, которое в два раза больше исходного. Чему может равняться это число?

14.(исх.) Тетушке Маше на три года меньше, чем Саше вместе с его ровесником Пашей. Сколько лет было Саше, когда тетушке Маше было столько же лет, сколько сейчас Паше?

1. (младшие) Сколькими способами число 100 можно представить в виде суммы трех простых чисел? (порядок слагаемых не важен)

2. (младшие) Четыре последовательных целых числа дают в произведении 1680. Какие это могут быть числа?

3. (младшие) На какое наибольшее количество различных прямоугольников с целыми сторонами можно разрезать по линиям сетки квадрат 5×5? (Приведите пример)

4. (младшие) Рыболова спросили, сколько весила пойманная им рыба. Он ответил: «Хвост весил 4 фунта, голова столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище столько, сколько голова и хвост». Сколько весила рыба?

5. (младшие) У грибника в корзине подберезовиков на n% меньше, чем подосиновиков. На сколько процентов n меньше числа процентов, на которое подосиновиков больше, чем подберезовиков?

6. (младшие) Сколько существует различных квадратов со сторонами, идущими по линиям сетки квадрата 8×8?

7. (младшие) На гранях кубика написаны шесть различных цифр. Сумма цифр на противоположных гранях одна и та же для каждой пары параллельных граней. Каковы остальные три цифры, если три известны: 4, 5 и 8 ? (Перечислите все возможные варианты).

8. (младшие) Сколько среди чисел $2x + y$, $x - y$, $x - 2y$, $y - 2x$ может быть положительных? (Укажите все варианты.)

9. (младшие) Два равнобедренных треугольника приложили боковыми сторонами друг к другу так, что образовался новый равнобедренный треугольник. Какими могут быть углы у этого треугольника?

10. (младшие) Какое наибольшее натуральное число в записи римскими цифрами начинается на MMX?

11. (младшие) Какое наименьшее натуральное число имеет более 12 натуральных делителей?

12. (младшие) Одно круглое бревно весит 30 кг, второе бревно − вдвое толще и вдвое короче. Сколько весит второе бревно?

13. (младшие) Сколько раз в году может встречаться пятница, 13-е?

14. (младшие) Вершины выпуклого 2n-угольника пронумеровали, начиная с 1. Оказалось что общее число его диагоналей кратно числу диагоналей, соединяющих вершины с четными номерами. Сколько вершин имеет этот многоугольник? Укажите все варианты.

15. (младшие) Сколько существует трехзначных чисел, у которых последняя цифра равна произведению двух первых цифр?

16. (младшие) В равнобедренном треугольнике *ABC (AB=BC)* на стороне *BC* взяли точки *K* и *M* (*K* ближе к *B*, чем *M*) такие, что *KM=AM* и углы *MAC* и *KAB* равны. Чему равен угол *BAM*?

17. (младшие) В клетках квадрата 3x3 расставили цифры 1,2,3,…,9. Затем в каждом из 4 внутренних узлов записали среднее арифметическое окружающих его четырех цифр. После этого вычислили среднее арифметическое полученных четырех чисел. Какое наибольшее число может при этом получиться?

18. (младшие) Шестерым братьям вместе 57 лет. Каждый из них, кроме самого старшего, моложе следующего по возрасту брата на одно и то же число. Самый старший старше самого младшего на столько лет, сколько трем младшим вместе. Сколько лет каждому?

19. (младшие) Квадратный лист бумаги перегнули по прямой так, что получился невыпуклый многоугольник. Какое наибольшее количество сторон у него может быть?
20. (младшие) 45 конфет стоят столько же рублей, сколько их можно купить на 20 рублей. Сколько конфет можно купить на 50 рублей?
1. (старшие) Сколькими способами число 100 можно представить в виде суммы трех простых чисел? (порядок слагаемых не важен)
2. (старшие) Четыре последовательных целых числа дают в произведении 1680. Какие это могут быть числа?
3. (старшие) Найдите углы ромба, если его периметр в восемь раз больше высоты.
4. (старшие) Рыболова спросили, сколько весила пойманная им рыба. Он ответил: «Хвост весил 4 фунта, голова столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище столько, сколько голова и хвост». Сколько весила рыба?
5. (старшие) Найдите все такие пятерки подряд идущих натуральных чисел, что сумма квадратов трех из них равна сумме квадратов двух других. (Ответ запишите в виде соответствующих равенств).
6. (старшие) Сколько существует различных квадратов со сторонами, идущими по линиям сетки квадрата 8×8?
7. (старшие) На гранях кубика написаны шесть различных цифр. Сумма цифр на противоположных гранях одна и та же для каждой пары параллельных граней. Каковы остальные три цифры, если три известны: 4, 5 и 8 ? (Перечислите все возможные варианты).
8. (старшие) Сколько среди чисел $2x + y$, $x - y$, $x - 2y$, $y - 2x$ может быть положительных? Укажите все варианты.
9. (старшие) В треугольнике середины высот лежат на одной прямой. Найдите площадь этого треугольника, если один его угол равен 30°, а меньшая высота равна 3.
10. (старшие) Какое наибольшее натуральное число в записи римскими цифрами начинается на MMX?
11. (старшие) Какое наименьшее натуральное число имеет более 12 натуральных делителей?
12. (старшие) Одно круглое бревно весит 30 кг, второе бревно – вдвое толще и вдвое короче. Сколько весит второе бревно?
13. (старшие) Сколько раз в году может встречаться пятница, 13-е?
14. (старшие) Вершины выпуклого многоугольника пронумеровали, начиная с 1. Оказалось что общее число его диагоналей кратно числу диагоналей, соединяющих вершины с четными номерами. Сколько вершин имеет этот многоугольник? Укажите все варианты.
15. (старшие) Сколько существует трехзначных чисел, у которых последняя цифра равна произведению двух первых цифр?
16. (старшие) На периметре прямоугольника 3x4 выбрана точка M. Найдите длину кратчайшего пути, начинающегося и оканчивающегося в точке M, и имеющего общую точку с каждой стороной прямоугольника.
17. (старшие) В клетках квадрата 3x3 расставили цифры 1,2,3,…,9. Затем в каждом из 4 внутренних узлов записали среднее арифметическое окружающих его четырех цифр. После этого вычислили среднее арифметическое полученных четырех чисел. Какое наибольшее число может при этом получиться?
18. (старшие) Шестерым братьям вместе 57 лет. Каждый из них, кроме самого старшего, моложе следующего по возрасту брата на одно и то же число. Самый старший старше самого младшего на столько лет, сколько трем младшим вместе. Сколько лет каждому?
19. (старшие) Квадратный лист бумаги перегнули по прямой так, что получился невыпуклый многоугольник. Какое наибольшее количество сторон у него может быть?
20. (старшие) 45 конфет стоят столько же рублей, сколько их можно купить на 20 рублей. Сколько конфет можно купить на 50 рублей?

ОТВЕТЫ К ИСХОДНЫМ ЗАДАЧАМ
1. 10 чисел
2. 0 (ни одного)
3. 224 и 624
4. 0,1,3,5,6,8
5. 142 857
6. прямоугольник 3×5 **Проверьте картинку – 3 фигурки из 5 клеток должны быть разными!**
7. 16
8. 9 км
9. 7 сторон **Проверьте пример!**
10. 22+979=1001
11. 3 трактора
12. 9
13. 198
14. 3 года

ОТВЕТЫ К ЗАЧЕТНЫМ (МЛАДШИЕ)
1. 4 способа
2. 5, 6, 7, 8 и –8, -7, -6, -5
3. 7 различных прямоугольников
4. 32 фунта
5. n%
6. 204 квадрата
7. (0, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (3, 6, 7), **(3, 7, 9), (6, 7, 9)**
8. 0, 1, 2 или 3 числа
9. 90, 45, 45 и 36, 72, 72 градусов
10. MMXCIX = 2099 Принимается любой вариант.
11. 144
12. 60 кг
13. 1, 2 и 3 раза
14. 4 и 6
15. 32 числа
16. 60 градусов
17. 6,125 = 6 1/8 Принимается любой вариант.
18. 2, 5, 8, 11, 14 и 17 лет
19. 9 сторон
20. 75 штук

ОТВЕТЫ К ЗАЧЕТНЫМ ЗАДАЧАМ (СТАРШИЕ)
1. 4 способа
2. 5, 6, 7, 8 и –8, -7, -6, -5
3. 30° и 150°
4. 32 фунта
5. $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$ и $2^2+4^2+5^2=3^2+6^2$
6. 204 квадрата
7. (0, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (3, 6, 7), (3, 7, 9), (6, 7, 9)
8. 0, 1, 2 или 3 числа
9. $6\sqrt{3}$
10. MMXCIX = 2099 Принимается любой вариант.
11. 144
12. 60 кг
13. 1, 2 и 3 раза
14. 4, 5 и 6
15. 32 числа
16. 10
17. 6,125 = 6 1/8 Принимается любой вариант.
18. 2, 5, 8, 11, 14 и 17 лет
19. 9 сторон
20. 75 штук

XV УРАЛЬСКИЙ (VIII КИРОВСКИЙ) ТУРНИР
ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–23.02.2000

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2000

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Докажите, что ребус: ЗАДАЧА+ЗАДАЧА = ТУРНИР не имеет решений.

2. У Васи и Пети по 55 гирь весом 1, 2, …, 55 кг. Они по очереди подкладывают свои гири – каждый на свою чашу двухчашечных весов – причем первым ходит Вася. Петя выигрывает, если разность масс гирь на чашах окажется равной 50 кг. Сможет ли он этого добиться?

3. Пусть $S(n)$ – сумма цифр числа n. Найдите все n, для которых $n + S(n) + S(S(n)) + \ldots + \underbrace{S(S(\ldots S(n)))}_{n-1\ раз} = 2000000$.

4. В треугольнике ABC $\angle A = 3\angle C$. Точка D на стороне BC обладает тем свойством, что $\angle ADC = 2\angle C$. Доказать, что $AB+AD = BC$.

5. Имеется n дискеток и n этикеток, раскрашенные в несколько цветов. Дубль – это дискета, к которой приклеена этикетка того же цвета. Докажите, что можно добиться того, что все дубли будут одного цвета.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составить одно двузначное и одно трехзначное число так, чтобы второе делилось на первое? (Каждая цифра должна быть использована ровно один раз).

2. Самолет вылетел из Москвы в час ночи 15 декабря по московскому времени и прибыл в город N в семь утра того же дня по местному времени. В полдень 15 декабря по N-скому времени он вылетел в город Р и прибыл туда в 13.00 того же дня по Р-скому времени. Через два часа он вылетел в Москву и вернулся туда в 18.00 15 декабря по московскому времени. Сколько времени самолет находился в воздухе? Ответ обязательно должен быть обоснован.

3. У Васи и Пети по 55 гирь весом 1, 2, …, 55 кг. Они по очереди подкладывают свои гири – каждый на свою чашу двухчашечных весов. Первым ходит Вася. Петя выигрывает, если разность масс гирь на чашах окажется равной 50 кг. Сможет ли он этого добиться?

4. Пусть $S(n)$ – сумма цифр числа n. Найдите все n, для которых $n + S(n) + S(S(n)) + \ldots + \underbrace{S(S(\ldots S(n)))}_{n-1\ раз} = 2000000$.

5. В треугольнике ABC $\angle A = 3\angle C$. Точка D на стороне BC обладает тем свойством, что $\angle ADC = 2\angle C$. Доказать, что $AB+AD = BC$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составить одно двузначное и одно трехзначное число так, чтобы второе делилось на первое? (Каждая цифра должна быть использована ровно один раз).

2. Докажите, что ребус: ЗАДАЧА+ЗАДАЧА = ТУРНИР не имеет решений.

3. Самолет вылетел из Москвы в час ночи 15 декабря по московскому времени и прибыл в город N в семь утра того же дня по местному времени. В полдень 15 декабря по N-скому времени он вылетел в город Р и прибыл туда в 13.00 того же дня по Р-скому времени. Через два часа он вылетел в Москву и вернулся туда в 18.00 15 декабря по московскому времени. Сколько времени самолет находился в воздухе? Ответ обязательно должен быть обоснован.

4. Имеется 100 дискеток и 100 этикеток, раскрашенные в два цвета. Дубль – это дискета, к которой приклеена этикетка того же цвета. Докажите, что можно добиться того, что все дубли будут одного цвета?

5. У Васи и Пети по 55 гирь весом 1, 2, …, 55 кг. Они по очереди подкладывают свои гири – каждый на свою чашу двухчашечных весов. Первым ходит Вася. Петя выигрывает, если разность масс гирь на чашах окажется равной 50 кг. Сможет ли он этого добиться?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2000
ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. За успехи в математике была награждена группа ребят. При этом 14 школьников были отмечены за хорошее выступление на Уральском турнире, 11 – за победу на областной олимпиаде и 13 – за отличную учебу в ЛМШ. Известно, что всего награждено было меньше 20 человек (причем могли награждать и за другие успехи). Оказалось, что три награды не получил никто. А сколько ребят получили по две награды?

2. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля. Вася каждый круг проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя – на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле – два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

3. Число состоит из 36 цифр. Разрешается разбить его на группы из шести цифр и как-нибудь переставить эти группы. Известно, что одна из перестановок в семь раз больше другой. Докажите, что эта большая перестановка делится на 49.

4. По кругу сидят 2000 рыцарей и лжецов. Каждый из них заявил, что его соседи – лжец и рыцарь, но два рыцаря при этом ошиблись. Сколько среди них лжецов?

5. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 взяли точку, для которой отношение расстояния до самой далекой вершины к расстоянию до самой близкой стороны минимально. Чему равно это отношение?

6. Каждая сторона правильного треугольника поделена на 15 равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате этого получили разбиение треугольника на маленькие треугольнички. После этого в каждый из маленьких треугольничков записали +1 или –1. Известно, что число в каждом треугольничке равно произведению чисел в тех треугольничках, которые имеют с ним общую сторону. Докажите, что в каждом из маленьких треугольничков, прилегающих к серединам сторон большого треугольника, стоит число +1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. В некотором месяце вторников больше чем понедельников и больше чем сред. Какой это мог быть месяц?

2. За успехи в математике была награждена группа ребят. При этом 14 школьников были отмечены за хорошее выступление на Уральском турнире, 11 – за победу на областной олимпиаде и 13 – за отличную учебу в ЛМШ. Известно, что всего награждено было меньше 20 человек (причем могли награждать и за другие успехи). Оказалось, что три награды не получил никто. А сколько ребят получили по две награды?
3. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля. Вася каждый круг проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя – на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле – два круга. Сколько кругов составляла дистанция?
4. Число состоит из 36 цифр. Разрешается разбить его на группы из шести цифр и переставить эти группы как-нибудь. Известно, что одна из перестановок в семь раз больше другой. Докажите, что эта большая перестановка делится на 49.
5. По кругу сидят 2001 рыцарей и лжецов. Каждый заявил, что его соседи – лжец и рыцарь, но два рыцаря при этом ошиблись. Сколько среди них лжецов?
6. Каждая сторона правильного треугольника поделена на 15 равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате этого получили разбиение треугольника на маленькие треугольнички. После этого в каждый из маленьких треугольничков записали +1 или –1. Известно, что число в каждом треугольничке равно произведению чисел в тех треугольничках, которые имеют с ним общую сторону. Докажите, что в каждом из маленьких треугольничков, прилегающих к серединам сторон большого треугольника, стоит число +1.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. (6-7) *Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составить одно двузначное и одно трехзначное число так, чтобы второе делилось на первое? (Каждая цифра должна быть использована ровно один раз). (Р.Г. Женодаров*)
Ответ. Можно. 532 делится на 14, а 215 делится на 43.
2. (6-7) *Самолет вылетел из Москвы в час ночи 15 декабря по московскому времени и прибыл в город N в семь утра того же дня по местному времени. В полдень 15 декабря по N-скому времени он вылетел в город P и прибыл туда в 13.00 того же дня по P-скому времени. Через два часа он вылетел в Москву и вернулся туда в 18.00 15 декабря по московскому времени. Сколько времени самолет находился в воздухе? Ответ обязательно должен быть обоснован.* (*И.С. Рубанов, районный тур Кировской области, 1996, 9 кл.*)
Ответ. 10 часов. ***Решение.*** Самолет отсутствовал в Москве 17 часов с 1.00 до 18.00, при этом он находился на земле всего 7 часов – с 7.00 до 12.00 по местному времени в городе N и с 13.00 до 15.00 местного времени в городе P. Следовательно, все остальное время он летел.
3. (6-8) *У Васи и Пети по 55 гирь весом 1, 2, …, 55 кг. Они по очереди подкладывают свои гири – каждый на свою чашу двухчашечных весов. Первым ходит Вася. Петя выигрывает, если разность масс гирь на чашах окажется равной 50 кг. Сможет ли он этого добиться? (Ю.М. Лифшиц)*
Ответ. Да. ***Решение 1.*** Петя может просто повторять ходы Васи. В какой-то момент Вася вынужден будет сходить гирей 50 кг – и немедленно проиграет. ***Решение 2.*** Петя откладывает в сторону свою 50-килограммовую гирю и ходит как угодно остальными гирями. В конце игры Вася выложит все гири, а Петя – все, кроме 50-килограммовой. Следовательно, чаша Васи будет весить на 50 кг тяжелее.
4. (6, 8) *Докажите, что ребус ЗАДАЧА+ЗАДАЧА = ТУРНИР не имеет решений. (Р.Г. Женодаров)*
Решение. Сложение *А*+*А* должно быть выполнено в трех различных разрядах, при этом результаты записываются тремя различными буквами – *У*, *Н* и *Р*. Но это невозможно, так как *А*+*А* может принимать только два разных значения – эта сумма является либо некоторым четным числом (если нет переноса из предыдущего разряда), либо следующим за ним нечетным (если есть перенос единицы из предыдущего разряда). Переноса двух единиц быть не может.
5. (6, 8) *Имеется 100 дискеток и 100 этикеток, раскрашенные в несколько цветов. Дубль – это дискета, к которой приклеена этикетка того же цвета. Докажите, что можно добиться того, что все дубли будут одного цвета? (А. Шапиро)*
Решение 1. Наклеим сначала этикетки на дискетки в произвольном порядке. Предположим, что у нас образовались дубли нескольких различных цветов. Возьмем по одной дискетке-дублю двух разных цветов и обменяем их этикетки. После этого каждая из дискеток

перестанет быть дублем, так что общее число дублей уменьшится на 2. Далее будем повторять эту операцию до тех пор, пока дублей различных цветов не останется. ***Решение 2.*** Докажем нужный факт индукцией по числу дискеток (при этом можно даже не обращать внимание на соответствие цветов дискеток и этикеток!). База индукции (одна дискетка) очевидна. Переход: если все k+1 дискеток одноцветны, то и доказывать нечего. Если же есть дискетки разных цветов, то возьмем одну из них и наклеим на нее этикетку другого цвета, а для остальных k дискеток применим предположение индукции.

6. (7-8) *Пусть S(n) – сумма цифр числа n. Найдите все n, для которых* $n + S(n) + S(S(n)) + \ldots + \underbrace{S(S(\ldots S(n)))}_{n-1\ раз} = 2000000$ *.(О.С. Нечаева)*

Ответ. Таких n не существует. ***Доказательство.*** Все n слагаемых в левой части дают одинаковый остаток при делении на 3, совпадающий с остатком от деления на 3 самого числа n. Перебирая три различных случая, получаем, что остаток от деления левой части на 3 равен либо 0, либо 1. Но правая часть – число 2000000 – при делении на 3 дает в остатке 2.

7. (7-8) *В треугольнике ABC $\angle A = 3\angle C$. Точка D на стороне BC обладает тем свойством, что $\angle ADC = 2\angle C$. Доказать, что AB+AD = BC. (С.Л. Берлов)*

Доказательство. Продолжим отрезок BA за точку A и отложим на нем отрезок $AE = AD$. Заметим, что $\angle EAC = 180 - \angle BAC = 180 - 3\angle C$, поэтому треугольники ADC и AEC равны (по сторонам AC, $AD=AE$ и углу между ними). Отсюда находим углы треугольника AEC: $\angle AEC = \angle ADC = 2\angle C$, $\angle ACE = \angle C$, т.е. $\angle BCE = 2\angle C$, поэтому треугольник BEC равнобедренный. Таким образом, $AB+AD = AB+AE = BE = BC$.

Победители и призеры личной олимпиады

Фамилия	**Имя**	**Команда**	**Кл.**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Сумма**	**Награда**
Копысов	Владимир	Глазов	6	7	7	7	7	0	**28**	**2**
Трегубов	Алексей	Киров	6	7	7	7	0	7	**28**	**2**
Федоровых	Данил	Киров	6	7	2	7	6	7	**29**	**2**
Ворончихин	Андрей	Глазов	6	7	7	0	4	7	**25**	**3**
Вершинин	Олег	Киров	6	7	7	7	0	0	**21**	**ПО**
Рендакова	Кира	Киров	6	7	0	7	7	1	**22**	**ПО**
Стрекалов	Николай	Глазов	6	0	7	7	0	7	**21**	**ПО**
Гулла	Юрий	С-Пб	7	7	7	7	7	7	**35**	**1**
Петухова	Надежда	С-Пб	7	7	7	7	7	7	**35**	**1**
Федоров	Алексей	С-Пб	7	7	7	7	7	7	**35**	**1**
Альминов	Евгений	Киров	7	7	7	7	0	7	**28**	**2**
Жуйков	Роман	Ижевск	7	7	7	7	0	7	**28**	**2**
Милостнов	Дмитрий	Глазов	7	7	7	7	0	7	**28**	**2**
Никитин	Сергей	С-Пб	7	7	7	7	7	0	**28**	**2**
Родин	Александр	Ижевск	7	7	7	7	0	7	**28**	**2**
Саенко	Олег	Н.Тагил	7	7	7	7	0	7	**28**	**2**
Филимонов	Владислав	Екатеринбург	7	7	7	0	7	7	**28**	**2**
Швед	Павел	Челябинск	7	7	7	7	0	6	**27**	**2**
Волчков	Антон	Саров	7	7	7	7	0	2	**23**	**3**
Коврижных	Николай	Киров	7	7	7	7	0	4	**25**	**3**
Мешин	Юрий	Киров	7	7	7	7	3	0	**24**	**3**
Байдин	Василий	Снежинск	7	0	7	7	0	7	**21**	**ПО**
Железов	Дмитрий	С-Пб	7	0	7	7	0	7	**21**	**ПО**
Калинин	Максим	Пермь	7	7	0	7	7	0	**21**	**ПО**
Лазарев	Алексей	Киров	7	7	7	0	7	0	**21**	**ПО**
Вершинина	Анастасия	Киров	8	7	7	7	7	7	**35**	**1**
Семушин	Иван	Киров	8	7	7	7	7	7	**35**	**1**
Смирнов	Александр	С-Пб	8	7	7	7	7	7	**35**	**1**
Ширяев	Дмитрий	С-Пб	8	7	7	7	7	7	**35**	**1**
Борисенко	Николай	Н.Тагил	8	7	7	7	0	7	**28**	**2**
Ефремов	Михаил	Ижевск	8	7	7	0	7	7	**28**	**2**

Князев	Василий	Ижевск	8	7	7	0	7	7	**28**	**2**
Кунгуров	Евгений	Ижевск	8	7	7	0	7	6	**27**	**2**
Миргасимов	Алмаз	Н.Челны	8	7	0	7	7	7	**28**	**2**
Монаков	Александр	Ижевск	8	7	7	0	7	7	**28**	**2**
Новокрещенов	Олег	Ижевск	8	6	7	7	7	0	**27**	**2**
Потапенко	Игорь	Н.Тагил	8	7	7	0	7	7	**28**	**2**
Смышляев	Сергей	Киров	8	7	0	7	5	7	**26**	**2**
Корецкий	Семен	Екатеринбург	8	7	7	2	7	0	**23**	**3**
Лукоянов	Игорь	Н.Новгород	8	4	7	7	7	0	**25**	**3**
Веретенников	Сергей	Киров	8	7	7	0	7	0	**21**	**ПО**
Виленская	Ольга	Ижевск	8	7	0	0	7	7	**21**	**ПО**
Каменских	Марина	Пермь	8	7	0	0	7	7	**21**	**ПО**
Кунгуров	Сергей	Пермь	8	7	7	0	0	7	**21**	**ПО**
Ланин	Константин	Иркутск	8	7	7	0	0	7	**21**	**ПО**
Липин	Николай	Снежинск	8	7	7	0	7	0	**21**	**ПО**
Маркин	Андрей	Н.Тагил	8	7	7	0	7	0	**21**	**ПО**
Мерзляков	Николай	Ижевск	8	7	7	0	7	0	**21**	**ПО**
Осянин	Станислав	Н.Челны	8	7	7	0	7	0	**21**	**ПО**
Слепушкин	Александр	Н.Тагил	8	7	0	0	7	7	**21**	**ПО**
Хураскин	Алексей	Н.Челны	8	7	7	0	7	0	**21**	**ПО**
Пантелеев	Леонид	Киров	5(6)	7	6	7	0	7	**27**	**2**
Бадзян	Андрей	Челябинск	7(8)	7	7	7	7	7	**35**	**1**
Дубашинский	Михаил	С-Пб	7(8)	7	7	7	7	7	**35**	**1**

XV УРАЛЬСКИЙ (VIII КИРОВСКИЙ) ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2000

ПРАВИЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО БОЯ

Внимание! *Правила боя существенно изменены по сравнению с действовавшими на XIV Уральском турнире. Изменения выделены подчеркиванием. Просим внимательно ознакомиться с ними.*

Общие положения. Математический бой – это соревнование двух команд в решении математических задач. Он состоит из двух частей. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение. При решении задач команда может использовать любую литературу, но не имеет права общаться по поводу решения задач ни с кем, кроме жюри. По истечении этого времени начинается собственно бой, когда команды в соответствии с правилами рассказывают друг другу решения задач. Если одна команда рассказывает решение, то другая *оппонирует* его, т.е. ищет в нем ошибки (недостатки), и, если решения нет, то, возможно, приводит свое. При этом выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах (за решение и за оппонирование). Если команды, обсудив предложенное решение, все-таки до конца задачу не решили или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все баллы) может забрать себе жюри боя. Если по окончании боя результаты команд отличаются не более чем на 3 балла, то считается, что бой закончился вничью. В противном случае побеждает команда, которая по окончании боя набирает больше баллов. Если же по условиям боя он не может закончиться вничью, то жюри до боя объявляет это командам и оглашает процедуру определения победителя.

Капитаны команд имеют право попросить жюри о предоставлении перерыва в ходе боя на 5–10 минут (примерно через каждые полтора часа). Перерыв может предоставляться только между обсуждением двух различных задач (между раундами). При этом команда, которая должна сделать вызов, делает его в письменной форме (без оглашения) непосредственно перед началом перерыва и сдает жюри, которое оглашает этот вызов сразу после окончания перерыва.

Вызовы. Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда (если не происходит отказ от вызова – см. ниже пункт “Окончание боя”) одна из команд *вызывает* другую на одну из задач, решения которых еще не рассказывались (например: “Мы вызываем команду соперников на задачу номер 8”). После этого вызванная команда сообщает, *принимает ли она вызов*, т.е. согласна ли рассказывать решение задачи, на которую была вызвана (ответ можно обдумывать, но не более 1 минуты). Если да, то она выставляет *докладчика,* который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет *оппонента*, обязанность которого – искать в решении ошибки.

Если нет, то докладчика обязана выставить команда, которая вызывала, а отказавшаяся отвечать команда выставляет оппонента. Команда, желающая сохранить выходы к доске, может отказаться выставлять оппонента. Тогда она в этом раунде не участвует (и изменить своего решения уже не может).

Ход раунда. ***Доклад.*** В начале раунда докладчик рассказывает решение. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности, он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничивается 15 минутами, после чего жюри решает, разрешать ли докладчику рассказывать дальше.

Докладчик может иметь бумагу с чертежами и (с отдельного разрешения жюри) вычислениями. Но он не имеет права брать с собой текст решения.

Докладчик имеет право :

– до начала выступления вынести на доску всю необходимую информацию (чертежи, вычисления и т.п.);

– не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения;

– просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: “Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то?”);

– отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: (а) он не имеет ответа на этот вопрос; (б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); (в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями (б) и (в) арбитром выступает жюри.

Докладчик не обязан:

– излагать способ получения ответа, если он может доказать правильность и полноту ответа другим путем;

– сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

Докладчик обязан рассказывать решение в вежливой, корректной форме, критикуя действия оппонента, не допускать критики его личности, обращаться к оппоненту только на “Вы”.

Оппонирование. Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право просить повторения части решения и разрешать докладчику не доказывать какие-либо очевидные с точки зрения оппонента факты. После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что у него нет вопросов. Если докладчик в течение минуты не начинает отвечать на вопрос, то считается, что у него нет ответа.

В качестве вопроса оппонент может :

– потребовать у докладчика повторить любую часть доклада;

– попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: (а) попросить дать определение любого термина (“Что Вы понимаете под ...”); (б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения (“Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ...”);

– попросить докладчика доказать сформулированное тем неочевидное необщеизвестное утверждение (в спорных случаях вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, изучающиеся в общеобразовательной школе);

– после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ (если таковой в задаче подразумевается) или план дальнейших рассуждений.

Оппонент обязан:

– формулировать свои вопросы в вежливой, корректной форме, обращаться к докладчику только на “Вы”;

– критикуя доклад, не допускать критики докладчика;

– повторять и уточнять свои вопросы по просьбе докладчика или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент имеет право дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: (а) признать решение правильным; (б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и/или пробелы с обязательным их указанием; (в) признать решение (ответ) неправильным с указанием ошибок в обоснованиях ключевых утверждений доклада или контрпримеров к ним (или ответу), или указанием существенных пробелов в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи (такое бывает, например, в случаях, когда вопрос задачи звучит как "Можно ли …?", "Верно ли, что …?" и т.п.), то оппонент имеет право заявить: "Я с решением не согласен, у меня есть контрпример", но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (хотя жюри имеет право потребовать от оппонента предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причем докладчик и его команда уже не имеют права менять решение или ответ.

Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить "Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи", не указывая пока докладчику явно, какой именно случай не рассмотрен. Дальнейшие действия докладчика, жюри и оппонента такие же, как в ситуации с контрпримером.

Участие жюри в обсуждении. После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости оно может вмешиваться и раньше.

Выступающие и команда. Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о замене или перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время полуминутного перерыва, который любая команда может взять в любой момент (при этом соперники тоже могут пользоваться этим временем). Каждая команда может взять в течение одного боя не более 6 полуминутных перерывов (см. также ниже пункт "Число выходов к доске").

Перемена ролей. Некорректный вызов. Порядок вызовов. Если по ходу дискуссии жюри установило, что оппонент доказал отсутствие у докладчика решения и ранее не произошел отказ от вызова, то возможны два варианта. Если вызов на этот раунд был принят, то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит *полная перемена ролей*: бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же вызов на этот раунд не был принят, то говорят, что вызов был *некорректным.* В этом случае перемены ролей не происходит, а команда, вызывавшая некорректно, должна снова вызывать соперника в следующем раунде. Во всех остальных случаях в следующем раунде вызывает та команда, которая была вызвана в текущем раунде.

Принятый вызов всегда считается корректным!

Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то, если ранее не произошел отказ от вызова и вызов на этот раунд был принят, оппонент получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков (*"залатать дыры"*). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика нет решения, но отказался рассказывать собственное решение. Если оппонент взялся "залатывать дыры", то происходит *частичная перемена ролей*: оппонент обязан сформулировать предварительно, что именно он будет делать (например, разбирать такой-то неразобранный докладчиком случай, доказывать такое-то недоказанное докладчиком утверждение или что-либо еще), а бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование сформулированных утверждений. При проверке корректности вызова частичная перемена ролей невозможна.

Обратной перемены ролей ни в каком случае не происходит!

Число выходов к доске. Каждый член команды имеет право выйти к доске в качестве докладчика или оппонента не более двух раз за бой. Команда имеет право *не более трех раз за бой* заменять докладчика или оппонента, причем каждый раз выход засчитывается как тому, кого заменили, так и тому, кто вышел на замену. Кроме того, при замене время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на 1 минуту (эту минуту можно использовать непосредственно перед заменой, а можно и не использовать – в последнем случае команда соперников тоже *не имеет права* пользоваться ею).

Отказ от вызова. Окончание боя. В любой момент боя команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решенных задач, если она не хочет делать вызов, который может оказаться некорректным). Тогда другая команда получает право (но не обязана) рассказывать решения оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права, даже если они у нее и появятся (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей).

Бой заканчивается, когда не остается необсужденных задач либо когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

Первый вызов. Конкурс капитанов. Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри о своем желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное – победил его соперник. При этом что понимается под “правильным решением”: просто верный ответ, ответ с объяснением или что-либо еще – жюри при необходимости уточняет перед началом конкурса капитанов.

На решение задачи конкурса капитанов жюри отводит определенное время. Если за это время ни один из капитанов не высказал желания отвечать, жюри может заменить задачу или выявить победителя жребием. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в игру. В этом случае победителем считается тот, кто выигрывает игру. Возможны и другие схемы проведения конкурса капитанов. Жюри боя заранее определяет способ проведения конкурса капитанов и сообщает о нем командам перед началом боя.

При желании на конкурс вместо капитана можно выставить любого другого члена команды.

Начисление баллов. Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик, не опираясь существенно на наводящие вопросы и иные соображения жюри и/или оппонента, рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если же в решении были выявлены "дыры" (пробелы), то жюри по окончании дискуссии определяет их стоимость. После этого оппонент, как правило, сразу получает половину стоимости *обнаруженных им* дыр. Если некоторые "дыры" были в ходе дискуссии полностью или частично закрыты, соответствующая часть остатка общей стоимости дыр распределяется между докладчиком и оппонентом пропорционально их вкладу в закрытие "дыр". При этом вкладом оппонента может признаваться не только закрытие им дыры (в случае полной или частичной перемены ролей), но и помощь докладчику в закрытии дыр путем высказанных *по окончании доклада* наводящих соображений. Все оставшиеся баллы жюри забирает себе.

Если не было полной перемены ролей, то оппонент не может получить больше 6 баллов.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устранены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он сам нашел эти недостатки. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, то команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае могло бы состоять из одной фразы: “У Вас нет решения”), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

Капитан. Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т.д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана. Имена капитана и заместителя сообщаются жюри до начала решения задач.

Во время решения задач главная обязанность капитана – координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан распределяет между членами команды задачи для решения (с учетом их пожеланий), следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче и определяет всю тактику команды на предстоящем бое.

Жюри. Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий задач, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено жюри всем остальным командам.

Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет протокол боя. Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием Председателя жюри. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда изменен быть не может.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски.

Жюри обязано мотивировать свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

ЗАДАЧИ ТУРНИРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2000
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано 101 различное натуральное число. Известно, что среднее арифметическое любых десяти чисел – целое число. Докажите, что хотя бы одно из исходных чисел больше 1000.

2. Через точку M – середину стороны AC треугольника ABC ($AB\neq BC$) – провели прямую, параллельную биссектрисе угла B. Она пересекла прямую BC в точке X, а прямую AB – в точке Y. Через точки X и Y провели прямые, перпендикулярные BC и AB соответственно. Докажите, что точка их пересечения равноудалена от вершин A и C.

3. Чертежный инструмент "треугольник" – это железный равносторонний треугольник со стороной 1. Можно приложить треугольник к любой точке или к любому ранее проведенному отрезку и обвести контур треугольника. Также разрешается соединять отрезком две точки на расстоянии не более 1. Докажите, что с помощью треугольника можно разделить данный отрезок пополам.

4. На доске написано натуральное число. Первую цифру сложили со второй, вторую с третьей, и так далее, предпоследнюю цифру сложили с последней, после чего эти числа выписали в строчку без пробелов, сохраняя порядок. С полученным числом проделали такую же операцию, и так далее (например, из 1568 получается 61114, а из него, в свою очередь, 7225). Найдите наименьшее число, из которого такими операциями нельзя получить однозначное число.

5. Известно, что $x > y > 0$ и $2(x+y) \geq 5\sqrt{xy}$. Докажите, что $x \geq 4y$.

6. Квадрат разбит на четное число прямоугольников. Докажите, что можно его разрезать на два многоугольника так, чтобы разрез шел по границам прямоугольников и в каждом многоугольнике оказалась половина всех прямоугольников.

7. Чебурашка и Шапокляк поедают ящик апельсинов. За один ход Шапокляк может либо съесть один хороший апельсин, либо заменить два хороших апельсина на два гнилых, Чебурашка может либо съесть два хороших апельсина, либо съесть один хороший и выкинуть один гнилой. Первым ходит Чебурашка. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, если изначально в ящике было n хороших и ни одного гнилого апельсина?

8. На острове Невезения 2000 жителей. Часть из них – лжецы, которые всегда лгут, а остальные – рыцари, которые всегда говорят правду. Каждый из них знает, кем – лжецом или рыцарем – является любой другой житель острова, кроме его ближайшего соседа (одного, если таких соседей несколько). Приехавший корреспондент перенумеровал всех жителей острова, а потом провел социологический опрос, и каждый опрошенный, имевший порядковый номер k, сказал: «Я знаю, что на острове не менее k лжецов». Докажите, что на острове есть два рыцаря, один из которых – ближайший сосед другого.

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дано 101 различное натуральное число. Известно, что среднее арифметическое любых десяти чисел – целое число. Докажите, что хотя бы одно из исходных чисел больше 1000.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A – прямой, E – точка пересечения диагоналей, точка F – проекция E на сторону AB. Докажите, что углы DFE и CFE равны.

3. Чертежный инструмент "треугольник" – это железный равносторонний треугольник со стороной 1. Можно приложить треугольник к любой точке или к любому ранее проведенному отрезку и обвести контур треугольника. Также разрешается соединять отрезком две точки на расстоянии не более 1. Докажите, что с помощью треугольника можно разделить данный отрезок пополам.

4. На доске написано натуральное число. Первую цифру сложили со второй, вторую с третьей, и так далее, предпоследнюю цифру сложили с последней, после чего эти числа выписали в строчку без пробелов, сохраняя порядок. С полученным числом проделали такую же операцию, и так далее (например, из 1568 получается 61114, а из него, в свою очередь, 7225). Найдите наименьшее число, из которого такими операциями нельзя получить однозначное число.

5. Известно, что $x > y > 0$ и $2(x+y) \geq 5\sqrt{xy}$. Докажите, что $x \geq 4y$.

6. Учительница дала отличнице Кате четыре положительных числа. Катя написала на доске числа 3, 4 и 7 и сказала, что каждое из них является суммой каких-то трех из четырех данных ей чисел. Докажите, что Катя ошиблась.

7. Чебурашка и Шапокляк поедают ящик апельсинов. Первоначально в нем 100 хороших апельсинов и 50 гнилых. За один ход Шапокляк может либо съесть один хороший апельсин, либо заменить два хороших апельсина на два гнилых, Чебурашка может либо съесть два хороших апельсина, либо съесть один хороший и выкинуть один гнилой. Первым ходит Чебурашка. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. На острове Невезения 2000 жителей. Часть из них – лжецы, которые всегда лгут, а остальные – рыцари, которые всегда говорят правду. Каждый из них знает, кем – лжецом или рыцарем – является любой другой житель острова, кроме его ближайшего соседа (одного, если таких соседей несколько). Приехавший корреспондент перенумеровал всех жителей острова, а потом провел социологический опрос, и каждый опрошенный, имевший порядковый номер k, сказал: «Я знаю, что на острове не менее k лжецов». Докажите, что на острове есть два рыцаря, один из которых – ближайший сосед другого.

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано 101 различное натуральное число. Известно, что среднее арифметическое любых десяти чисел – целое число. Докажите, что хотя бы одно из исходных чисел больше 1000.

2. BD – биссектриса угла ADC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle BAD = \angle DBC$ и $3\angle BAD + 2\angle BDA = 180°$. Докажите, что $BA + CD = AD$.

3. Чертежный инструмент "треугольник" – это железный равносторонний треугольник со стороной 1. Можно приложить треугольник к любой точке или к любому ранее проведенному отрезку и обвести контур треугольника. Также разрешается соединять отрезком две точки на расстоянии не более 1. Докажите, что с помощью треугольника можно разделить данный отрезок пополам.

4. На доске написано натуральное число. Первую цифру сложили со второй, вторую с третьей, и так далее, предпоследнюю цифру сложили с последней, после чего эти числа выписали в строчку без пробелов, сохраняя порядок. С полученным числом проделали такую же операцию, и так далее (например, из 1568 получается 61114, а из него, в свою очередь, 7225). Найдите наименьшее число, из которого такими операциями нельзя получить однозначное число.

5. В каждой клетке шахматной доски находится таракан. За одно действие все тараканы, находящиеся в некоторой клетке, могут переползти в соседнюю клетку, если в ней есть хотя бы один таракан (нельзя переползать в пустые клетки). Может ли случится, что после нескольких действий тараканов расположение тараканов будет следующим: по 8 тараканов в клетках a7 и g1, по 10 тараканов в клетках a5 и e1, по 12 тараканов в клетках a3 и c1 и, наконец, 4 таракана в клетке a1?

6. В жюри олимпиады 20 человек. Каждое заседание начинается с того, что члены жюри, которых более половины присутствующих считают некомпетентными, изгоняются навсегда. Докажите, что через 10 заседаний состав жюри стабилизируется.

7. Чебурашка и Шапокляк поедают ящик апельсинов. За один ход Шапокляк может либо съесть один хороший апельсин, либо заменить два хороших апельсина на два гнилых, Чебурашка может либо съесть два хороших апельсина, либо съесть один хороший и выкинуть один гнилой. Первым ходит Чебурашка. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, если изначально в ящике было n хороших и ни одного гнилого апельсина?

8. На острове Невезения 2000 жителей. Часть из них – лжецы, которые всегда лгут, а остальные – рыцари, которые всегда говорят правду. Каждый из них знает, кем – лжецом или рыцарем – является любой другой житель острова, кроме его ближайшего соседа (одного, если таких соседей несколько). Приехавший корреспондент перенумеровал всех жителей острова, а потом провел социологический опрос, и каждый опрошенный, имевший порядковый номер k, сказал: «Я знаю, что на острове не менее k лжецов». Докажите, что на острове есть два рыцаря, один из которых – ближайший сосед другого.

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дано 101 различное натуральное число. Известно, что среднее арифметическое любых десяти чисел – целое число. Докажите, что хотя бы одно из исходных чисел больше 1000.

2. В группе из 40 ребят некоторые знают все буквы, кроме "м", которую просто пропускают при письме, а остальные – знают все буквы, кроме "р", которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово "мак", 15 других учеников – слово "рак", а остальных – слово "мрак". При этом слова "мак" и "рак" оказались написанными по 11 раз. Сколько ребят написали свое слово верно?

3. Чертежный инструмент "треугольник" – это железный равносторонний треугольник со стороной 1. Можно приложить треугольник к любой точке или к любому ранее проведенному отрезку и обвести контур треугольника. Также разрешается соединять отрезком две точки на расстоянии не более 1. Докажите, что с помощью треугольника можно разделить данный отрезок пополам.

4. На доске написано натуральное число. Первую цифру сложили со второй, вторую с третьей, и так далее, последнюю цифру сложили с предпоследней, после чего эти числа выписали в строчку без пробелов, сохраняя порядок. С полученным числом проделали такую же операцию, и так далее (например, из 1568 получается 61114, а из него, в свою очередь, 7225). Существует ли число, из которого такими операциями нельзя получить однозначное число?

5. Учительница дала отличнице Кате четыре положительных числа. Катя написала на доске числа 3, 4 и 7 и сказала, что каждое из них является суммой каких-то трех из четырех данных ей чисел. Докажите, что Катя ошиблась.

6. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ лучи KL и NM пересекаются в точке P, а лучи LM и KN – в точке Q. Известно, что $NK = LK$, $KP=KQ$ и $\angle MPQ = 28°$. Найдите $\angle PQM$.

7. Чебурашка и Шапокляк поедают ящик апельсинов. Первоначально в нем 100 хороших апельсинов и 50 гнилых. За один ход Шапокляк может либо съесть один хороший апельсин, либо заменить два хороших апельсина на два гнилых, Чебурашка может либо съесть два хороших апельсина, либо съесть один хороший и выкинуть один гнилой. Первым ходит Чебурашка. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. На острове Невезения 2000 жителей. Часть из них – лжецы, которые всегда лгут, а остальные – рыцари, которые всегда говорят правду. Каждый из них знает, кем – лжецом или рыцарем – является любой другой житель острова, кроме его ближайшего соседа (одного, если таких соседей несколько). Приехавший корреспондент перенумеровал всех жителей острова, а потом провел социологический опрос, и каждый опрошенный, имевший порядковый номер k, сказал: «Я знаю, что на острове не менее k лжецов». Докажите, что на острове есть два рыцаря, один из которых – ближайший сосед другого.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2000
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На шахматной доске 2000×2000 стоят n^2 коней и 2000–n ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество фигур может быть на доске?

2. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем всего есть 200 дорог. Оказалось, что любой циклический маршрут имеет длину не менее пяти. Докажите, что существуют два непересекающихся циклических маршрута.

3. Десять гирь весом 1, 2, ..., 10 г разделили на две группы так, что в каждой группе больше одной гири. Докажите, что можно положить на одну чашу весов какие-то гири (одну или несколько) из одной группы, а на другую – какие-то гири из другой группы так, что весы окажутся в равновесии.

4. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляры к сторонам AB и AD, восставленные, соответственно, из вершин B и D пересеклись в точке, лежащей на прямой AC. Докажите, что $ABCD$ – ромб или прямоугольник.

5. Существует ли такой конечный набор натуральных чисел, что все их попарные суммы различны и среди этих попарных сумм есть 100 натуральных чисел, идущих подряд?

6. В клетках таблицы 100×100 расставлены попарно различные числа. Каждую минуту каждое из чисел меняется на наибольшее из чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Сколько различных чисел может остаться в таблице через 4 часа?

7. Пусть n – натуральное число. Обозначим через P_k количество целых неотрицательных решений уравнения $kx + (k+1)y = n - k + 1$. Выразите сумму $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ через n.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Докажите, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне AB.

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На шахматной доске 20×20 стоят несколько ладей, а на всех полях, которые ими не бьются, стоят кони. Никакие фигуры не бьют друг друга. Какое наибольшее количество фигур может быть на доске?

2. Какие значения может принимать число x, если выполняются такие равенства: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = x$?

3. Десять гирь весом 1, 2, ..., 10 г разделили на две группы так, что в каждой группе больше одной гири. Докажите, что можно положить на одну чашу весов какие-то гири (одну или несколько) из одной группы, а на другую – какие-то гири из другой группы так, что весы окажутся в равновесии.

4. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB и $AB = BC = BD$. Докажите, что $CD = CO$ (O – точка пересечения диагоналей).

5. Одно и то же натуральное число поделили с остатком на 3, на 18 и на 48. Сумма остатков оказалось равна 39. Найдите остаток от деления этого числа на 3.

6. В клетках таблицы 100×100 расставлены попарно различные числа. Каждую минуту каждое из чисел меняется на наибольшее из чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Сколько различных чисел может остаться в таблице через 4 часа?

7. Вася написал программу, которая решает ребус ДВА+ТРИ=ПЯТЬ. Компьютер выдал 210 решений этого ребуса и сообщил, что других решений нет. Доказать, что программа работает неправильно.

8. Написанное на доске число можно умножить или разделить на 5/6 или 9/10. Можно ли из 1 получить другое целое число?

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На шахматной доске 20×20 стоят n^2 коней и 20–n ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество фигур может быть на доске?

2. Какие значения может принимать число x, если выполняются такие равенства: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = x$?

3. Десять гирь весом 1, 2, ..., 10 г разделили на две группы так, что в каждой группе больше одной гири. Докажите, что можно положить на одну чашу весов какие-то гири (одну или несколько) из одной группы, а на другую – какие-то гири из другой группы так, что весы окажутся в равновесии.

4. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB и $AB = BC = BD$. Докажите, что $CD = CO$ (O – точка пересечения диагоналей).

5. Существует ли такой конечный набор натуральных чисел, что все их попарные суммы различны и среди этих попарных сумм есть 100 натуральных чисел, идущих подряд?

6. В клетках таблицы 100×100 расставлены попарно различные числа. Каждую минуту каждое из чисел меняется на наибольшее из чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Сколько различных чисел может остаться в таблице через 4 часа?

7. Вася написал программу, которая решает ребус ДВА+ТРИ=ПЯТЬ. Компьютер выдал 210 решений этого ребуса и сообщил, что других решений нет. Доказать, что программа работает неправильно.

8. Написанное на доске число можно умножить или разделить на 5/6 или 9/10. Можно ли из 1 получить другое целое число?

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На шахматной доске 20×20 стоят несколько ладей, а на всех полях, которые ими не бьются, стоят кони. Никакие фигуры не бьют друг друга. Какое наибольшее количество коней может быть на доске?

2. Какие значения может принимать число x, если выполняются такие равенства: $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=x$?

3. Десять гирь весом 1, 2, ..., 10 г разделили на две группы так, что в каждой группе больше одной гири. Докажите, что можно положить на одну чашу весов какие-то гири (одну или несколько) из одной группы, а на другую – какие-то гири из другой группы так, что весы окажутся в равновесии.

4. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB и $AB = BC = BD$. Докажите, что $CD = CO$ (O – точка пересечения диагоналей).

5. Одно и то же натуральное число поделили с остатком на 3, на 18 и на 48. Сумма остатков оказалось равна 39. Найдите остаток от деления этого числа на 3.

6. В клетках таблицы 100×100 расставлены попарно различные числа. Каждую минуту каждое из чисел меняется на наибольшее из чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Могут ли через 4 часа все числа в таблице оказаться одинаковыми?

7. Все ученики математического кружка, кроме троих, учатся в 5 классе, все, кроме троих, учатся в шестом классе, и все, кроме двоих, семиклассники. Сколько всего человек занимается в этом кружке?

8. Написанное на доске число можно умножить или разделить на 5/6 или 9/10. Можно ли из 1 получить другое целое число?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2000
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. N кругов расположены так, что центр каждого из них лежит внутри ровно одного из остальных, и внутри каждого лежит центр ровно одного из остальных. Найдите все числа N, при которых такое возможно.

2. Квадратная страна 2000×2000 км разбита на прямоугольные области 100×200 км. Области объявили независимость, и каждая пара областей, имеющих общий участок границы, построила на двоих одну таможню. Какое наибольшее число таможен могло быть построено?

3. У художника-копииста есть картина, представляющая из себя белый клетчатый прямоугольник, на котором некоторые клетки покрашены в черный цвет, и бесконечный белый клетчатый холст. Художник каждый полдень закрашивает две клетки холста в черный цвет, а его сын-хулиган каждую полночь перекрашивает одну из них обратно в белый цвет. Музей принимает картины ежедневно с 9.00 до 10.00. Докажите, что вне зависимости от действий сына художник может скопировать картину, вырезать ее из холста и сдать в музей.

4. У каждой из 4100 плиток размером 1×1 две стороны покрашены в черный цвет, а две стороны – в белый. Докажите, что из этих плиток можно сложить квадрат 64×64 так, чтобы любые две соседние по стороне плитки прилегали друг к другу сторонами разных цветов.

5. На микрокалькуляторе ТыкДык-200000 есть кнопки "+1", "–16", "–9" и "+8", причём калькулятор взрывается, как только в него попадает число, делящееся на 8. Докажите, что из числа 1 нельзя получить ровно за 200000 операций число 200001, не взорвав калькулятор.

6. Точка P внутри остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle PAC=\angle PBC$. Точки L и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что точки L и M равноудалены от середины стороны AB

7. Докажите, что если $ac - a - c = b^2 - 2b$, $bd - b - d = c^2 - 2c$ и $b\neq c$, то $ad + b + c = bc + a + d$.

8. Докажите, что в любой бесконечной возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, есть число с нечетной суммой цифр.

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Можно ли расположить на плоскости 17 кругов так, чтобы центр каждого из них лежал внутри ровно одного из остальных, и внутри каждого лежал центр ровно одного из остальных?

2. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрали точку D такую, что $BC=CD$. На катете BC выбрали такую точку E, что $DE=CE$. Докажите, что $AD+BE=DE$.

3. У художника-копииста есть картина, представляющая из себя белый клетчатый прямоугольник, на котором некоторые клетки покрашены в черный цвет, и бесконечный белый клетчатый холст. Художник каждый полдень закрашивает две клетки холста в черный цвет, а его сын-хулиган каждую полночь перекрашивает одну из них обратно в белый цвет. Музей принимает картины ежедневно с 9.00 до 10.00. Докажите, что вне зависимости от действий сына художник может скопировать картину, вырезать ее из холста и сдать в музей.

4. У каждой из 4100 плиток размером 1×1 две стороны покрашены в черный цвет, а две стороны – в белый. Докажите, что из этих плиток можно сложить квадрат 64×64 так, чтобы любые две соседние по стороне плитки прилегали друг к другу сторонами разных цветов.

5. На микрокалькуляторе ТыкДык-2000 есть кнопки "+1", "+16", "–7" и "-23", причём калькулятор взрывается, как только в него попадает число, делящееся на 8. Докажите, что из числа 1 нельзя получить ровно за 2000 операций число 2001, не взорвав калькулятор.

6. Докажите, что из любого простого числа, большего 1000, можно вычеркнуть одну или две цифры так, чтобы получилось составное число.

7. Докажите, что если $ac - a - c = b^2 - 2b$, $bd - b - d = c^2 - 2c$ и $b\neq c$, то $ad + b + c = bc + a + d$.

8. В углу доски $m\times n$ стоит ладья. Двое по очереди передвигают ее по горизонтали или по вертикали. При этом все поля, через которые ладья прошла, из доски выбрасываются и ходить по ним или через них нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. N кругов расположены так, что центр каждого из них лежит внутри ровно одного из остальных, и внутри каждого лежит центр ровно одного из остальных. Найдите все числа N, при которых такое возможно.

2. Квадратная страна 2000×2000 км разбита на прямоугольные области 100×200 км. Области объявили независимость, и каждая пара областей, имеющих общий участок границы, построила на двоих одну таможню. Какое наибольшее число таможен могло быть построено?

3. У художника-копииста есть картина, представляющая из себя белый клетчатый прямоугольник, на котором некоторые клетки покрашены в черный цвет, и бесконечный белый клетчатый холст. Художник каждый полдень закрашивает две клетки холста в черный цвет, а его сын-хулиган каждую полночь перекрашивает одну из них обратно в белый цвет. Музей принимает картины ежедневно с 9.00 до 10.00. Докажите, что вне зависимости от действий сына художник может скопировать картину, вырезать ее из холста и сдать в музей.

4. У каждой из 4100 плиток размером 1×1 две стороны покрашены в черный цвет, а две стороны – в белый. Докажите, что из этих плиток можно сложить квадрат 64×64 так, чтобы любые две соседние по стороне плитки прилегали друг к другу сторонами разных цветов.

5. На микрокалькуляторе ТыкДык-2000 есть кнопки "+1", "–16", "–9" и "+8", причём калькулятор взрывается, как только в него попадает число, делящееся на 8. Докажите, что из числа 1 нельзя получить ровно за 2000 операций число 2001, не взорвав калькулятор.

6. Каждый из 38 попугаев завязал на удаве по одному узлу. Если сложить удава вдвое или втрое, то каждый узел попадет ровно на один другой. Докажите, что если удава сложить вшестеро, то какой-то узел попадет на сгиб.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$. На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок $BD = 2AB$. Найдите угол BDC.

8. Знайка взял на воздушный шар семь пакетов с песком (каждый из них весит целое число килограммов) общим весом 25 кг. Незнайка, узнав об этом, тут же заявил, что при помощи двухчашечных весов он сможет определить вес каждого из этих пакетов. Прав ли он?

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Третье тысячелетие начинается 01.01.2001 и заканчивается 31.12.3000. Сколько в нем есть дат, которые записываются ровно двумя различными цифрами?

2. Прямоугольный ящик 75×100×125 сантиметров разбит шестью разрезами на 27 отделений (для каждой пары противоположных граней ящика проведены два параллельных им разреза). При этом внутреннее отделение – куб со стороной 45 сантиметров. Найдите сумму объемов восьми отделений, примыкающих к вершинам ящика.

3. В треугольнике провели средние линии. Оказалось, что медианы исходного треугольника делят пополам углы получившегося. Докажите, что исходный треугольник – равносторонний.

4. Числа $a,b > 0$ таковы, что $a^3 + b^6 = a^4 + b^9 = a^5 + b^{12}$. Докажите, что $a = b$.

5. На микрокалькуляторе ТыкДык-2000 есть кнопки "+1", "+16", "–7" и "-23", причём калькулятор взрывается, как только в него попадает число, делящееся на 8. Докажите, что из числа 1 нельзя получить ровно за 2000 операций число 2001, не взорвав калькулятор.

6. Каждый из 38 попугаев завязал на удаве по одному узлу. Если сложить удава вдвое или втрое, то каждый узел попадет ровно на один другой. Докажите, что если удава сложить вшестеро, то какой-то узел попадет на сгиб.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$. На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок $BD = 2AB$. Найдите угол BDC.

8. Знайка взял на воздушный шар семь пакетов с песком (каждый из них весит целое число килограммов) общим весом 25 кг. Незнайка, узнав об этом, тут же заявил, что при помощи двухчашечных весов он сможет определить вес каждого из этих пакетов. Прав ли он?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2000
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что при $n>2$ число $n!$ можно представить в виде суммы n различных его делителей.

2. Докажите, что существует натуральное число n такое, что в записи числа $\sqrt{n}$ сразу после десятичной запятой подряд идут цифры 20001999.

3. В треугольнике ABC $AB = BC$. На стороне AB выбрана точка M, а на продолжении стороны AC – точка K такая, что $KM = MC$. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекается с CM в точке P. Докажите, что прямая AP делит отрезок KM пополам.

4. С написанными на доске положительными числами разрешается выполнить одну из двух следующих операций: 1) стереть произвольное число x и записать два раза число $\sqrt{x+1} - 1$; 2) стереть два произвольных числа x и y и записать число $x+y+xy$. Изначально на доске написано число a. Через несколько операций на доске оказалось написано одно число. Докажите, что оно равно a.

5. Остап Бендер дает сеанс одновременной игры 45 шахматистам, сидящим по кругу. Напротив некоторых из шахматистов стоят стулья. Остап садится на стул перед шахматистом, и, сделав ход, переходит к следующему по часовой стрелке шахматисту. При этом он передвигает стул, если перед следующим шахматистом стула нет. Все стулья одинаковы. Могло ли случиться так, что в течение 2000 ходов Остапа ни разу не повторилось расположение стульев и Остапа (считается, что за это время ни одна из партий не закончится) ?

6. M – середина стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что углы BAD, BMC и CDA равны 60°. Докажите, что $AB+CD = AM+BC$.

7. Во дворе стоят несколько столбов, некоторые пары соединены проводами. Всего протянуто mn проводов, и эти провода раскрашены в n цветов, причем ни от какого столба не отходят провода одинакового цвета. Докажите, что можно перекрасить эти провода так, чтобы проводов всех цветов было поровну и по-прежнему ни от какого столба не отходили два провода одного цвета.

8. Числа от 1 до 100 выписали в строку в некотором порядке. Среди любых трех подряд стоящих чисел подчеркнули среднее по величине. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех подчеркнутых чисел?

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В алфавите языка племени МУМБО-ЮМБО всего две буквы А и Б. Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа таких операций: вычёркивания трёх подряд идущих букв А, вставки трех букв А в любое место, замены любого набора стоящих рядом букв АБА на набор стоящих рядом букв БААБ или обратной замены. Верно ли, что слово АББ…Б и слово ББ…БА (в каждом из этих слов буква Б встречается 2000 раз) означают одно и то же?

2. Решите уравнение $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n}\right]=999$. (Здесь $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x).

3. В чемпионате по рыбной ловле участвовало несколько рыбаков. Известно, что победитель (поймавший наибольшее число рыб) поймал ровно в 4 раз меньше рыб, чем все остальные участники вместе взятые. Рыбак, занявший третье место, поймал ровно в 9 раз меньше, чем все остальные, а рыбак, оказавшийся на последнем месте, поймал ровно в 10 раз меньше, чем все остальные. Сколько рыбаков участвовало в соревновании?

4. Пусть M и N – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Известно, что серединные перпендикуляры к MN, AC и BD пересекаются в одной точке. Докажите, что $AB=CD$.

5. Остап Бендер дает сеанс одновременной игры 45 шахматистам, сидящим по кругу. Напротив некоторых из шахматистов стоят стулья. Остап садится на стул перед шахматистом, и, сделав ход, переходит к следующему по часовой стрелке шахматисту. При этом он передвигает стул, если перед следующим шахматистом стула нет. Все стулья одинаковы. Могло ли случиться так, что в течение 2000 ходов Остапа ни разу не повторилось расположение стульев и Остапа (считается, что за это время ни одна из партий не закончится) ?

6. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Найдите максимальное возможное значение их (всех десяти!) наибольшего общего делителя.

7. Во дворе стоит 36 столбов, изначально между любыми двумя столбами натянут провод. Каждое утро по дороге в школу хулиган Вася срывает 35 проводов. Каждый вечер электрик Петров восстанавливает провода, отходящие от некоторого столба. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы однажды утром после очередного акта вандализма осталось менее 18 проводов.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle CAD+\angle BCA=180°$ и $AB=BC+AD$. Докажите, что $\angle BAC+\angle ACD=\angle CDA$.

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В алфавите языка племени МУМБО-ЮМБО всего две буквы А и Б. Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа таких операций: вычёркивания трёх подряд идущих букв А, вставки трех букв А в любое место, замены любого набора стоящих рядом букв АБА на набор стоящих рядом букв БААБ или обратной замены. Верно ли, что слово АББ…Б и слово ББ…БА (в каждом из этих слов буква Б встречается 2000 раз) означают одно и то же?

2. В точке 1 числовой оси сидит кузнечик. Длина каждого его прыжка равна (по его желанию) либо 3, либо 4. Может ли он за 99 прыжков побывать во всех целых точках от 2 до 100?

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{z} = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} = \dfrac{1}{y}. \end{cases}$

4. Пусть M и N – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Известно, что серединные перпендикуляры к MN, AC и BD пересекаются в одной точке. Докажите, что $AB=CD$.

5. Остап Бендер дает сеанс одновременной игры 45 шахматистам, сидящим по кругу. Напротив некоторых из шахматистов стоят стулья. Остап садится на стул перед шахматистом, и, сделав ход, переходит к следующему по часовой стрелке шахматисту. При этом он передвигает стул, если перед следующим шахматистом стула нет. Все стулья одинаковы. Могло ли случиться так, что в течение 2000 ходов Остапа ни разу не повторилось расположение стульев и Остапа (считается, что за это время ни одна из партий не закончится) ?

6. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Найдите максимальное возможное значение их (всех десяти!) наибольшего общего делителя.

7. Во дворе стоят несколько столбов, некоторые пары из них соединены проводами. Всего протянуто mn проводов, раскрашенных в n цветов, причем ни от какого столба не отходят провода одинакового цвета. Докажите, что можно перекрасить провода так, чтобы проводов всех цветов было поровну и по-прежнему ни от какого столба не отходили два провода одного цвета.

8. Числа от 1 до 100 выписали в строку. Среди любых трех подряд стоящих чисел подчеркнули среднее по величине. Какое наименьшее количество чисел могло быть подчеркнуто?

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В алфавите языка племени МУМБО-ЮМБО всего две буквы А и Б. Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа таких операций: вычёркивания трёх подряд идущих букв А, вставки трех букв А в любое место, замены любого набора стоящих рядом букв АБА на набор стоящих рядом букв БААБ или обратной замены. Верно ли, что слово АББ…Б и слово ББ…БА (в каждом из этих слов буква Б встречается 2000 раз) означают одно и то же?

2. Найдите все пятизначные числа $\overline{abcde}$, которые делятся на $\overline{abde}$.

3. В чемпионате по рыбной ловле участвовало несколько рыбаков. Известно, что победитель (поймавший наибольшее число рыб) поймал ровно в 4 раз меньше рыб, чем все остальные участники вместе взятые. Рыбак, занявший третье место, поймал ровно в 9 раз меньше, чем все остальные, а рыбак, оказавшийся на последнем месте, поймал ровно в 10 раз меньше, чем все остальные. Сколько рыбаков участвовало в соревновании?

4. Пусть M и N – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Известно, что серединные перпендикуляры к MN, AC и BD пересекаются в одной точке. Докажите, что $AB=CD$.

5. Остап Бендер дает сеанс одновременной игры 45 шахматистам, сидящим по кругу. Напротив некоторых из шахматистов стоят стулья. Остап садится на стул перед шахматистом, и, сделав ход, переходит к следующему по часовой стрелке шахматисту. При этом он передвигает стул, если перед следующим шахматистом стула нет. Все стулья одинаковы. Могло ли случиться так, что в течение 2000 ходов Остапа ни разу не повторилось расположение стульев и Остапа (считается, что за это время ни одна из партий не закончится) ?

6. Сумма 10 натуральных чисел равна 99. Найдите максимальное возможное значение их (всех десяти!) наибольшего общего делителя.

7. Во дворе стоит 30 столбов, изначально между любыми двумя столбами натянут провод. Каждое утро по дороге в школу хулиган Вася срывает 29 проводов. Каждый вечер электрик Петров восстанавливает провода, отходящие от некоторого столба. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы однажды утром после очередного акта вандализма осталось менее 30 проводов.

8. В записи 1999-значного числа использовано 1000 девяток, 998 двоек и одна семерка. После вычеркивания одной цифры это число стало делится на 7 без остатка. Какую цифру вычеркнули?

Х

Т

V

С

№	Команда	1	2	3	4	Очки	Мест
1	Санкт-Петербург		53:25	49:44	72:21		о I
2	Киров-8	25:53		27:55	35:49		IV
3	Наб. Челны (гимназия 26)	44:49	55:27		50:18		II
4	Ижевск-8-II	21:72	49:35	18:50			III

С

№	Команда	1	2	3	4	Очки	Мест
1	Ижевск-8-I		57:3	54:36	26:61		о I
2	ГАЗ (Н.Новгород-Иркутск)	3:57		51:34	42:28		II
3	Нижний Тагил (НПТГ)	36:54	34:51		29:28		IV
4	Уралмаш-68 (Екатеринбург)	61:26	28:42	28:29			III

БОИ 23 февраля

Н.Челны : ГАЗ	42:14
Ижевск 8-1 : СПб	21:69
Урамаш:Ижевск 8-2	57:2
Н.Тагил : Киров 8	36:22

Итоговые места

1 место – СПб
2 место – Ижевск 8-1
3 место – Н.Челны 26
4 место – ГАЗ
5 место – Уралмаш
6 место – Ижевск 8-2
7 место – Н.Тагил ПГ
8 место – Киров 8

С

№	Команда	1	2	3	4	5	6	Место
1	Пермь		49:23	16:78	47:24		63:8	II
2	Озерск	23:49		57:30		23:41	54:19	III-V
3	Снежинск-127	78:16	30:57		51:37	69:19		I
4	Зеленогорск	24:47		37:51		43:25	49:22	III-V
5	Нижний Тагил (лицей 51)		41:23	19:69	25:43		38:12	III-V
6	Наб. Челны (кл. лицей)	8:63	19:54		22:49	12:38		VI

М

№	Команда	1	2	3	4	5	6	Место
1	Челябинск		42:54		56:37	26:41	83:2	IV
2	Киров-7-1	54:42		58:26	42:42	66:14		I
3	Саров		26:58		25:58	24:47	30:24	V
4	СПбГДТЮ (С.-Петербург)	37:56	42:42	58:25			75:1	III
5	Ижевск-7	41:26	14:66	47:24			36:13	II
6	Снежинск-125	2:83		24:30	1:75	13:36		VI

М

№	Команда	1	2	3	4	5	6	Место
1	Киров-7-2		36:22	34:30	28:35		62:6	II
2	Киров-6	22:36		2:59		54:26	38:39	
3	Глазов	30:34	59:2		34:45	34:30		III
4	Кострома	35:28		45:34		48:21	37:9	I
5	БКШ (Белорецк)		26:54	30:34	21:48		51:12	
6	Стерлитамак	6:62	39:38		9:37	12:51		