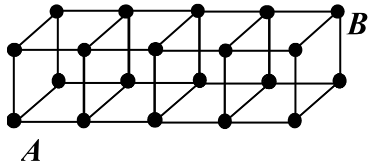
XIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ
СНЕЖИНСК, 30.10 – 05.11.99

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.11.99. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. У марсианских часов три стрелки. Первая стрелка обходит циферблат за полтора земных часа, вторая – за три, третья – за шесть. Первую стрелку поставили вертикально, вторую сместили на 120 градусов, а третью – на 240 градусов по часовой стрелке относительно первой. После этого часы запустили и стали считать, сколько раз встречаются две стрелки. Через сколько земных часов после запуска произойдет 1999-я такая встреча?

2. Дан решетчатый параллелепипед (см. рисунок), где длина каждого отрезка равна 1 см. В точке *A* сидит таракан. Какое наибольшее расстояние он может пройти по пути в точку *B*, не проходя ни через какую точку дважды?



3. Сумма двух чисел равна сумме их квадратов. Докажите, что сумма этих чисел не больше 2.

4. Набор из нескольких натуральных чисел обладает таким свойством, что любое число, умноженное на сумму всех остальных, делится на сумму всех чисел. Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на сумму этих чисел.

5. На стороне *AC* равностороннего треугольника *ABC* с центром *O* выбрана точка *M*. Точки *N* и *K* – основания перпендикуляров, опущенных из точки *M* на стороны *AB* и *BC* соответственно. Докажите, что прямая *MO* делит отрезок *NK* пополам.

6. В государстве 100 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем есть не менее четырех циклических маршрутов. Докажите, что есть циклический маршрут, проходящий не более, чем через 51 город.

7 Даны три отрезка длин 1, 2, 3. Отрезок длины 3 как-то разбили на 100 других. Докажите, что среди получившихся 102 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

8. Можно ли натуральные числа от 1 до 1999 разбить на две группы так, чтобы произведение всех чисел одной группы равнялось сумме всех чисел второй группы?

XIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ
СНЕЖИНСК, 30.10 – 05.11.99

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.11.99. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. У марсианских часов три стрелки. Первая стрелка обходит циферблат за полтора земных часа, вторая – за три, третья – за шесть. Первую стрелку поставили вертикально, вторую сместили на 120 градусов, а третью – на 240 градусов по часовой стрелке относительно первой. После этого часы запустили и стали считать, сколько раз встречаются две стрелки. Через сколько земных часов после запуска произойдет 600-я такая встреча?

2. Даны три отрезка длин 1, 2, 3. Отрезок длины 3 как-то разбили на 100 других. Докажите, что среди получившихся 102 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

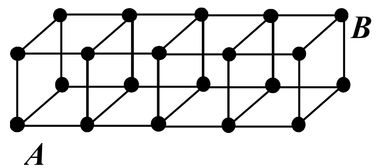
3. В государстве 90 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем есть не менее двух циклических маршрутов. Докажите, что есть циклический маршрут, проходящий не более, чем через 60 городов.

4. Квадратную таблицу размером 3×3 заполнили цифрами от 1 до 9, записав каждую ровно один раз. Может ли случиться, что для любой строки и любого столбца произведение трех стоящих в ней (нем) чисел делится на 4?

5. На стороне *AC* равностороннего треугольника *ABC* с центром *O* выбрана точка *M*. Точки *N* и *K* – основания перпендикуляров из точки *M* на стороны *AB* и *BC* соответственно. Докажите, что прямая *MO* делит отрезок *NK* пополам.

6. Сумма двух чисел равна сумме их квадратов. Докажите, что сумма этих чисел не больше 2.

7. Дан решетчатый параллелепипед (см. рисунок), где длина каждого отрезка равна 1 см. В точке *A* сидит таракан. Какое наибольшее расстояние он может пройти по пути в точку *B*, не проходя ни через какую точку дважды?



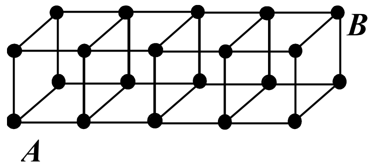
8. Набор из нескольких натуральных чисел обладает таким свойством, что любое число, умноженное на сумму всех остальных, делится на сумму всех чисел. Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на сумму этих чисел.

XIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ
СНЕЖИНСК, 30.10 – 05.11.99

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.11.99. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. У марсианских часов три стрелки. Первая стрелка обходит циферблат за полтора земных часа, вторая – за три, третья – за шесть. Первую стрелку поставили вертикально, вторую сместили на 120 градусов, а третью – на 240 градусов по часовой стрелке относительно первой. После этого часы запустили и стали считать, сколько раз встречаются две стрелки. Через сколько земных часов после запуска произойдет 600-я такая встреча?

2. Дан решетчатый параллелепипед (см. рисунок), где длина каждого отрезка равна 1 см. В точке A сидит таракан. Какое наибольшее расстояние он может пройти по пути в точку B, не проходя ни через какую точку дважды?



3. Окружность длины 19 см катится без проскальзывания по неподвижной окружности длины 99 см. Один сантиметр неподвижной окружности измазали неистощимой краской: если что-то ею измажется, оно затем пачкает все, к чему прикасается. Движение подвижной окружности начинается с начала измазанного участка по направлению к нему. Какой путь подвижная окружность пройдет к моменту, когда неподвижная окружность впервые окажется измазанной полностью?

4. Квадратную таблицу размером 3×3 заполнили цифрами от 1 до 9, записав каждое ровно один раз. Может ли случиться, что для любой строки и любого столбца произведение трех стоящих в ней (нем) чисел делится на 4?

5. Даны семь положительных чисел: два из них равны 1 и 2, а сумма остальных пяти равна 3. Докажите, что среди этих семи чисел есть такие три, что сумма любых двух из них больше третьего.

6. В государстве 90 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем есть не менее двух циклических маршрутов. Докажите, что есть циклический маршрут, проходящий не более, чем через 60 городов.

7. Докажите, что можно выбрать 100 различных натуральных чисел так, чтобы каждое из них делило нацело сумму остальных.

8. Игра идет на клетчатой плоскости. Первый своим ходом рисует два непересекающихся отрезка единичной длины, идущие по линиям сетки, а второй достраивает один из только что нарисованных отрезков до квадрата так, чтобы он не имел общих точек с уже нарисованными фигурами. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?