

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.11.99. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Восемь футбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой по одному разу). Какое наименьшее число очков гарантирует команде место в четверке лидеров? В современном футболе за победу дают 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.
2. Существуют ли 100 таких различных натуральных чисел, что квадрат каждого из них делится на сумму остальных?
3. Натуральные числа от 1 до 127 разбили на несколько (больше, чем на одну) групп с равными суммами. Докажите, что количество этих групп четно.
4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC ($AB=BC$) провели медианы AD и CE . Медиану AD продолжили на ее длину за точку D . Получилась точка X . Медиану CE продолжили на ее длину за точку C . Получилась точка Y . Докажите, что угол AXY – прямой.
5. На kn карточках с двух сторон написаны числа от 1 до n по $2k$ раз каждое. Докажите, что эти карточки можно положить на стол так, чтобы сверху каждое число было написано ровно k раз.
6. Решите в простых числах уравнение $p^2 + q = 37q^2 + p$.
7. На клетчатой бумаге отметили 36 вершин клеток так, что они образовали квадрат 5×5 . За один ход разрешается провести отрезок длины 2. Какое наименьшее число ходов надо сделать, чтобы от любой отмеченной вершины до любой другой можно было добраться по проведенным отрезкам, если переходить с одного отрезка на другой можно только в отмеченных точках?
8. В языке привидений всего две буквы: Ы и У. Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: вычёркивание (соответственно вставка) десяти одинаковых букв, идущих подряд, замена набора стоящих рядом букв УЫ набором ЫУУ или наоборот. Докажите, что среди любых 200 слов языка привидений найдутся два, означающие одно и то же.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.11.99. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Восемь футбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой по одному разу). Какое наименьшее число очков гарантирует команде место в четверке лидеров? В современном футболе за победу дают 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.
2. Существуют ли 100 таких различных натуральных чисел, что квадрат каждого из них делится на сумму всех чисел?
3. Натуральные числа от 1 до 127 разбили на несколько (больше, чем на одну) групп с равными суммами. Докажите, что количество этих групп четно.
4. Решите в простых числах уравнение $p^2 + q = 5q^2 + p$.
5. На kn карточках с двух сторон написаны числа от 1 до n по $2k$ раз каждое. Докажите, что эти карточки можно положить на стол так, чтобы сверху каждое число было написано ровно k раз.
6. В матче участвовали три команды. Перед боем игрок Иванов перешел из первой команды во вторую, игрок Петров – из второй команды в третью, а игрок Сидоров – из третьей команды в первую. После этого средний возраст первой команды увеличился на неделю, второй – увеличился на две недели, а третьей – уменьшился на 4 недели. Известно, что в первой и второй командах по 12 игроков. Сколько игроков в третьей команде?
7. В треугольнике ABC выполнены соотношения $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle ABC = 120^\circ$. Докажите, что медиана BD перпендикулярна стороне AB .
8. В языке привидений всего две буквы: Ы и У. Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: вычёркивание (соответственно вставка) десяти одинаковых букв, идущих подряд, замена набора стоящих рядом букв УЫ набором ЫУУ или наоборот. Докажите, что среди любого 101 слова языка привидений найдутся два, означающие одно и то же.

XIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ
СНЕЖИНСК, 30.10 – 05.11.99

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.11.99. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Восемь футбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой по одному разу). Какое наименьшее число очков гарантирует команде место в четверке лидеров? В современном футболе за победу дают 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.
2. Существуют ли 100 таких различных натуральных чисел, что квадрат каждого из них делится на сумму всех чисел?
3. Натуральные числа от 1 до 127 разбили на несколько (больше, чем на одну) групп с равными суммами. Докажите, что этих групп – четное число.
4. В матче участвовали три команды. Перед боем игрок Иванов перешел из первой команды во вторую, игрок Петров – из второй команды в третью, а игрок Сидоров – из третьей команды в первую. После этого средний возраст первой команды увеличился на неделю, второй – увеличился на две недели, а третьей – уменьшился на 4 недели. Известно, что в первой и второй командах по 12 игроков. Сколько игроков в третьей команде?
5. На kn карточках с двух сторон написаны числа от 1 до n по $2k$ раз каждое. Докажите, что эти карточки можно положить на стол так, чтобы сверху каждое число было написано ровно k раз.
6. В стране 201 город, из каждого выходит ровно 10 дорог, причем из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно выбрать 20 городов, никакие два из которых не соединены дорогой.
7. Решите в простых числах уравнение $p^2 + q = 5q^2 + p$.
8. В языке привидений всего две буквы: Ы и У. Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: вычёркивание (соответственно вставка) десяти одинаковых букв, идущих подряд, замена набора стоящих рядом букв УЫ набором ЫУУ или наоборот. Докажите, что среди любого 101 слова языка привидений найдутся два, означающие одно и то же.