

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 30.10.97. ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6–7 КЛАССОВ

1. Тришка отрезал от кафтана квадратный кусок, разрезал его на девять треугольных заплат и сложил их в три кучки по три заплаты. Могло ли оказаться так, что любые две заплаты из одной кучки равны друг другу, а из разных кучек – не равны?
2. Все целые числа от 1 до 2000 записали в следующем порядке: сперва записали в порядке возрастания все числа, сумма цифр которых равна 1. Затем – все числа с суммой цифр 2 (также в порядке возрастания), потом – все числа с суммой цифр 3 (также в порядке возрастания) и т.д. На каком месте оказалось число 1997?
3. Сложим все числа, которые получаются из некоторого натурального числа вычеркиванием какой-либо его цифры (слагаемых будет столько, сколько цифр в этом числе). Может ли полученная сумма оказаться равной 1997?
4. Прямоугольный параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ перекатывают (через ребра) по клетчатой доске 19×97 . Можно ли прокатить его так, чтобы каждую клетку доски параллелепипед покрыл ровно один раз?
5. На доске 4×4 расставляются шестнадцать шахматных коней четырех мастей – четыре вороных, четыре соловых, четыре гнедых и четыре каурых. Существует ли такая расстановка коней, в которой вороные не бьют соловых, соловые – гнедых, гнедые – каурых, а каурые – вороных?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 30.10.97. ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Все целые числа от 1 до 2000 записали в следующем порядке: сперва записали в порядке возрастания все числа, сумма цифр которых равна 1. Затем – все числа с суммой цифр 2 (также в порядке возрастания), потом – все числа с суммой цифр 3 (также в порядке возрастания) и т.д. На каком месте оказалось число 1997?
2. Найдутся ли три таких различных положительных числа a , b и c , что уравнения $ax + b = c$ и $x/a + 1/b = 1/c$ имеют общий корень?
3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB равна стороне AE , а сторона BC равна стороне DE , точка F – середина отрезка CD . Докажите, что если $AF \perp CD$, то точка пересечения прямых BD и CE лежит на прямой AF .
4. Каждая из 55 участниц женского собрания написала, у скольких из присутствующих возраст (число полных лет) не совпадает с ее возрастом. К их ужасу оказалось, что каждая написала именно свой возраст в годах! Каково наибольшее количество различных чисел могло быть среди написанных возрастов?
5. Можно ли разрезать квадрат на конечное число равнобедренных треугольников с углами 75° при основаниях?

**КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 30.10.97.
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6–8 КЛАССОВ**

1. Существует ли такое натуральное число n , что для любой пары нечетных цифр a и b число вида $a00\dots0b$ (между a и b – ровно n нулей) делится нацело на $10a + b$?
2. Дана окружность K_1 с центром O и диаметром AB . На отрезке OA , как на диаметре, построена окружность K_2 . Из точки O под углом 45° к OA проведен луч, пересекающий K_2 в точке C ($C \neq O$), а K_1 – в точке D . Докажите, что фигура ACD , ограниченная отрезками AC и CD и меньшей из двух дуг AD , делится окружностью K_2 на две части равной площади.
3. Жесткий квадратный проволочный контур со стороной 1 см разрезали на части, после чего некоторые части переложили и спаяли новый плоский замкнутый несамопересекающийся контур.
 - а) Были сделаны разрезы ровно в трех точках контура. Какую наибольшую площадь может охватывать новый контур?
 - б) Были сделаны разрезы ровно в четырех точках контура. Могла ли площадь, охватываемая контуром, увеличиться?
4. Найдите наибольшее натуральное число, у которого сумма и произведение цифр такие же, как и у числа 1997.
5. Пьяный шахматный король стоит в центре доски 5×5 . Может ли он побывать на каждом поле, кроме исходного, ровно по одному разу и последним ходом вернуться на исходное поле, если делать два хода подряд в одном и том же направлении он не в состоянии?
6. На плоскости проведено семь прямых, из которых любые две пересекаются и никакие три не проходят через одну точку. Когда плоскость разрезали по этим прямым, среди полученных частей оказалось ровно семь углов (угол – это часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общей вершиной). Найдите сумму величин этих углов.
7. На доске 1×17 слева выставлены восемь белых фишек, справа – восемь черных, среднее поле свободно. Два игрока ходят по очереди, каждый – фишками своего цвета (начинают игру, естественно, белые). За ход игрок переставляет любую свою фишку на свободное поле: белую – вправо, а черную – влево. Выигрывает тот игрок, кто первым переставит все свои фишки на сторону противника или лишит противника возможности сделать очередной ход. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника?