X УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. НАБЕРЕЖНЫЕ ЧЕЛНЫ, 29.10 – 4.11.97

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 31.10.97. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Красящий хамелеон – сказочная шахматная фигура, которая с любого поля ходит на соседнее по вертикали или горизонтали поле. При этом, попадая на некоторое поле, хамелеон либо красит это поле в свой цвет, либо перекрашивает себя в цвет этого поля. На шахматную доску, все поля которой синие, поставили зеленого хамелеона. Всякую ли раскраску доски в синий и зеленый цвета можно получить с его помощью?

2. Разрежьте квадрат со стороной 8 см на восемь многоугольников, для каждого из которых отношение его площади к периметру равно 0,5 см.

3. Назовем натуральное число n хорошим, если набор чисел 1, 2, 3, ..., $2n$ можно разбить на пары, сумма чисел в каждой из которых есть степень двойки. Найдите все хорошие числа.

4. На контурную карту нанесены десять городов (без названий) и железные дороги между некоторыми из них. Незнайке задали нанести на карту названия городов. Он расположения городов не помнил, но смог раздобыть список пар городов, напрямую соединенных железной дорогой. По его словам, этого хватило, чтобы однозначно установить название каждого города. Могут ли слова Незнайки быть правдой?

5. Назовем два натуральных числа двойниками, если суммы их цифр равны друг другу и произведения их цифр также равны друг другу (например, 124 и 2212 – двойники). Найдите все числа, у которых нет двойников.

6. На доске выписаны все целые числа от 1 до двузначного числа n. Петя посчитал количество выписанных цифр, и оказалось, что оно записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите все возможные значения n.

7. Двое играющих по очереди проводят на плоскости несовпадающие красные или синие прямые (цвет каждый выбирает независимо от предыдущих ходов), никакие три из которых не должны проходить через одну точку. После того, как они проведут по 20 прямых, первый игрок подсчитывает количество точек, в которых пересекаются прямые разных цветов, а второй – количество точек, в которых пересекаются прямые одного цвета. Выигрывает тот, у кого окажется больше точек. Может ли один из игроков выиграть независимо от игры другого?

8. На клетчатой доске 100×100 закрасили n прямоугольников, составленных из двух клеток каждый. Оказалось, что в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка. При каком наименьшем n это возможно?

X УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. НАБЕРЕЖНЫЕ ЧЕЛНЫ, 29.10 – 4.11.97

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.11.97. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Петя перегнул квадратный лист бумаги по прямой линии, получившуюся фигуру снова перегнул по прямой линии, и так k раз подряд. Затем он в трех местах проткнул согнутый лист шилом, причем ни один из проколов не пришелся ни на одну из линий сгиба или на край. Развернув после этого лист, Петя насчитал в нем ровно 31 дырку. При каком наименьшем k могло такое случиться?

2. Можно ли разрезать квадрат на равные треугольники и сложить из всех них два неравных квадрата?

3. Имеется двадцать одинаковых на вид монет, из которых семнадцать весят по 10 *г*, одна – 9,9 *г* и две – по 9,8 *г*. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь выявить хотя бы одну десятиграммовую монету?

4. На каждой из шести карточек написано по числу. Для каждого из 63 непустых наборов этих карточек нашли сумму всех чисел, написанных на карточках этого набора. Известно, что не все эти суммы оказались целыми. Докажите, что целых сумм не более 31.

5. Еженощно в 12 часов в гостиницах «Интурист», «КАМАЗ» и «Татарстан» производят подсчет постояльцев. Может ли случиться так, что в течение 1997 года по крайней мере 2/3 ночей в «Интуристе» будет больше постояльцев, чем в «КАМАЗе», по крайней мере 2/3 ночей в «КАМАЗе» будет больше постояльцев, чем в «Татарстане», и по крайней мере 2/3 ночей в «Татарстане» будет больше постояльцев, чем в «Интуристе»?

6. На складе лежат в большом количестве ширлы, мырлы и дырлы. Ширла состоит из пяти шашек, мырла – из семи машек, дырла – из девяти дашек. Все шашки одинаковы, машки – тоже, одинаковы и все дашки. У Васи есть чашечные весы без гирь, и он хочет за одно взвешивание узнать, что тяжелее: две шашки или машка с дашкой. К сожалению, все изделия, имеющиеся на складе – неразборные. Помогите Васе!

7. Двое ходят по очереди на доске 7×8, каждый своей ладьей. Вначале ладьи стоят в противоположных углах, а все остальные поля заполнены пешками. Каждым ходом ладья должна что-нибудь съесть – пешку или ладью противника (ладьи ходят по вертикали или горизонтали на любое расстояние, но через занятые поля не перепрыгивают). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из игроков может выиграть независимо от игры другого?

8. Окружность длины 110 м разбита на 110 одинаковых частей, а точки деления пронумерованы по ходу часовой стрелки от 1 до 110. В 12 часов большой кузнечик находится в точке №1, а маленький – в точке №2. Большой кузнечик прыгает по дуге на 38 м по ходу часовой стрелки каждую нечетную секунду, а маленький – на 32 м каждую четную секунду. Сколько раз до 13 часов кузнечики обгонят один другого?

X УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. НАБЕРЕЖНЫЕ ЧЕЛНЫ, 29.10 – 4.11.97

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.11.97. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Докажите (не используя длинного перебора), что нельзя отметить ровно по одной букве в каждом из слов данной задачи так, чтобы среди отмеченных букв не было бы повторяющихся.

2. Каково наибольшее возможное количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая единицу и само число)?

3. На доске 50×50 на каждой клетке одной из диагоналей стоит по шашке. Два игрока, делая ходы по очереди, играют в следующую игру. За один ход игрок сдвигает одну из шашек на одну клетку в фиксированном направлении (вниз). Если при этом шашка сходит с доски, игрок забирает ее себе в карман. Какое наибольшее количество шашек может забрать себе в карман первый игрок независимо от игры второго?

4. Есть два бумажных прямоугольных треугольника: красный с углами 30° и 60° и зеленый – с углами по 45°. Эти треугольники разрезали на n меньших треугольников каждый и разложили парами: красный с зеленым. При каком наименьшем n может случиться так, что в каждой паре набор углов красного треугольника совпадает с набором углов зеленого треугольника?

5. На складе лежат 27 деталей, промаркированных первым или вторым сортом. Детали одинакового сорта весят одинаково, и каждая деталь второго сорта немного легче детали первого сорта. Известно, что ровно одна из деталей промаркирована неправильно. Покажите, что ее можно наверняка выявить за три взвешивания на чашечных весах без гирь.

6. На острове Гдетотам расстояние между любыми двумя городами больше 100 км (хотя бы один город на острове есть). Местность, от которой до ближайшего гдетотамского города больше 40 км, считается провинцией. Раньше более 90% территории Гдетотама было провинцией, пока на этом острове не был построен еще один город. Может ли теперь провинция составлять менее 10% территории Гдетотама?

7. По итогам математической карусели восьми командам раздали 97 лотерейных билетов. За более высокое место давали больше билетов. Известно, что все команды получили разное число билетов, причем первая команда получила меньше, чем две последние вместе. Сколько билетов получила каждая из восьми команд?

8. Клетчатый квадрат 1997×1997 разрезали на несколько прямоугольников (по границам клеток). Докажите, что среди них найдется прямоугольник, периметр которого кратен четырем.

X УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. НАБЕРЕЖНЫЕ ЧЕЛНЫ, 29.10 – 4.11.97

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.11.97. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. На столе лежали шесть монет. Известно, что три из них – настоящие (весящие одинаково), а три других – фальшивые (также весящие одинаково), более легкие, чем настоящие. Вася принес с собой еще одну монету (одного из двух описанных типов). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь он сможет наверняка выяснить, настоящая это монета или фальшивая?

2. Можно ли разрезать квадрат на двадцать шесть прямоугольников так, чтобы каждый из них граничил по отрезку ровно с четырьмя другими?

3. Представьте число 1997 в виде суммы наибольшего возможного количества натуральных слагаемых, все цифры которых различны (в совокупности).

4. Из шахматной доски вырезан прямоугольник со сторонами, параллельными ее краям (стороны не обязательно идут по границам клеток). Докажите, что разность площадей белой и черной его частей не превосходит площади одной клетки.

5. Гата и Толя сыграли партию в шахматы. Белые пожертвовали ферзя и в итоге поставили мат одинокому черному королю. Докажите, что в партии был момент, когда число съеденных черных фигур и пешек равнялось числу белых фигур и пешек на доске.

6. Десять команд сыграли однокруговой футбольный турнир, причем не все игры завершились вничью. Оказалось, что ни для какой тройки команд количество ничьих среди трех сыгранных ими между собой матчей не равно двум. Какое наибольшее число матчей в этом турнире могло закончиться вничью?

7. Остап Бендер организовал раздачу слонов населению. Явилось двадцать человек. Остап построил их по кругу, дал одному первого слона, его соседу слева – второго, затем одного человека пропустил, следующему дал слона, пропустил двоих, следующему дал слона и т.д., пока не раздал всех 1997 имеющихся у него слонов. Скольким желающим не досталось ни одного слона?

8. Имеется кучка из 97 орехов. Два игрока, делая ходы по очереди, играют в следующую игру. За один ход игрок делит любую из имеющихся кучек на две. При этом, если образовались две неравные кучки, то он проигрывает сопернику один рубль. Игра заканчивается, когда в каждой кучке окажется по одному ореху. Может ли кто-нибудь из игроков обеспечить себе выигрыш независимо от игры соперника?