IX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18.02 – 23.02.97

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.97. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Каждая диагональ делит четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Обязательно ли его диагонали взаимно перпендикулярны?

2. В каждой клетке шахматной доски провели по одной диагонали. Докажите, что можно раскрасить каждый из получившихся 128 треугольников в один из трех цветов так, чтобы треугольники одинакового цвета по стороне не граничили.

3. Числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 + ab = a + b$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $a^2 + b^2$.

4. Какое наименьшее количество “доминошек” можно расставить на поле 8×8 так, чтобы в плоскости поля нельзя было бы сдвинуть ни одной “доминошки” при условии, что “доминошки” не должны выступать за пределы поля?

5. Назовем трехзначное число особенным, если из него можно вычеркнуть одну цифру так, что получившееся двузначное число окажется меньше суммы цифр исходного трехзначного. Сколько существует особенных трехзначных чисел?

6. Выпуклый пятиугольник вписан в окружность. Верно ли, что если равны все его диагонали, то все его углы равны между собой и все его стороны также равны между собой?

7. Несколько клеток бесконечного белого листа клетчатой бумаги закрасили в черный цвет. Разрешается выбрать на листе любой квадрат размером 2×2 и перекрасить все его белые клетки в черный цвет, а все черные – в белый. Назовем раскраску хорошей, если несколькими такими операциями можно добиться, чтобы все клетки листа стали белыми. Докажите, что раскраска является хорошей тогда и только тогда, когда в каждой горизонтали и в каждой вертикали листа в черный цвет закрашено четное число клеток.

8. При каком наименьшем натуральном n, отличном от 1, число 1979 нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых делится на n, но не делится на $n + 1$, а другое делится на $n + 1$, но не делится на n?

9. Назовем набор из 60 гирь *крепким*, если его невозможно разбить на три группы по 20 гирь в каждой так, чтобы массы всех трех групп были разными. Найдите все крепкие наборы, в которых есть хотя бы одна гиря массой 1 кг и хотя бы одна гиря массой 2 кг.

10. Два игрока играют, делая ходы по очереди. В свой ход каждый игрок пишет не делящееся ни на 2, ни на 5 натуральное число, в записи которого не более пяти цифр. Проигрывает тот игрок, после хода которого сумма всех выписанных чисел в первый раз превысит миллион. Кто выиграет при правильной игре?

IX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18.02 – 23.02.97

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.97. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = BD$. Докажите, что $AC > 1{,}5AD$.

2. Можно ли составить магический квадрат 5×5 из натуральных чисел от 1 до 25 (все эти числа нужно использовать ровно по одному разу) так, чтобы делилась на три сумма восьми чисел, стоящих во всех клетках внешней каемки, отличных от угловых клеток и центральных клеток сторон? Числовой квадрат называется магическим, если в нем равны между собой все суммы чисел по строкам, по столбцам и по диагоналям.

3. Рассмотрим целочисленные точки $(x;\ y)$ координатной плоскости, для которых $1 \le x,\ y \le 1997$. Отметим те из них, у которых координаты – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что отмеченных точек не менее половины.

4. Можно ли клетчатую доску 1998×1998 раскрасить в несколько цветов так, чтобы для каждого использованного цвета оказалось ровно две клетки этого цвета, причем эти две клетки находились в одном столбце или в одной строке и между ними была ровно одна клетка другого цвета? Каждая клетка красится целиком в один цвет.

5. На Марсе 2000 стран, и для каждой четверки стран хотя бы одна страна из этой четверки дружит с тремя другими странами из этой четверки. Найдите наименьшее возможное количество стран Марса, которые дружат со всеми остальными 1999 странами.

6. Верно ли, что найдутся два таких 1997-значных натуральных числа, что десятичные записи каждого из них и их произведения состоят только из нечетных цифр?

7. AE – биссектриса треугольника ABC, точка D выбрана на стороне AC так, что сумма величин углов DBC и ABC равна $180°$. Докажите, что DE – биссектриса угла BDC.

8. Клетчатый прямоугольник, каждая сторона которого не меньше 1, разбит на доминошки (прямоугольники из двух клеточек). Докажите, что количество квадратов 2×2, состоящих из двух целых доминошек, больше количества квадратов 2×2, состоящих из клеток четырех разных доминошек.

9. На доске в ряд выписаны n последовательных натуральных чисел. Двое играют в следующую игру: они по очереди разными мелками зачеркивают по одному из незачеркнутых ранее чисел, и так до тех пор, пока все числа не будут зачеркнуты. Если в какой-то момент игры окажется, что первый игрок зачеркнул два рядом стоящих числа, то он проиграл. Найдите все значения n, при которых первый игрок может не проиграть, независимо от игры второго игрока.

10. Докажите, что после раскрытия всех скобок и приведения всех подобных слагаемых в выражении $(1+x+x^2+x^3+\dots x^{2000})\cdot(1+x^2+x^4+x^6+\dots x^{4000})\cdot(1+x^3+x^6+x^9+\dots x^{6000})\cdot\dots\cdot(1+x^{2000}+x^{4000}+x^{6000}+\dots x^{2000^2})$ коэффициент при x^{1998} окажется строго больше, чем коэффициент при x^{1997}.

IX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18.02 – 23.02.97

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.97. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. При каком наибольшем n можно расставить на шахматной доске n белых и n черных ладей так, чтобы никакие две ладьи разных цветов не били друг друга?

2. Пусть a, b и c – стороны треугольника с периметром 1. Докажите что $\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}>6$.

3. На листе бумаги нарисован клетчатый квадрат 10×10. Двое по очереди делают ходы. Первый каждым своим ходом рисует клетчатый прямоугольник площадью в 20 клеток, все стороны которого лежат внутри или на сторонах исходного квадрата. Эти прямоугольники могут пересекаться, но не могут совпадать. Второй каждым своим ходом отмечает крестиком одну из клеток только что нарисованного прямоугольника, причем нельзя отмечать клетку, уже отмеченную ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода без нарушения правил. Кто из игроков выигрывает при правильной игре и как ему для этого надо играть?

4. Числа a, b, c. d, e нечетны и не являются точными квадратами. Может ли произведение $a^b \times b^c \times c^d \times d^e \times e^a$ быть точным квадратом?

5. Существуют ли такие натуральные a, b и c, что $(a + b)(b + c)(c + a) = 340$?

6. Имеются семь монет, пронумерованных от 1 до 7. Известно, что ровно шесть из них – настоящие, весящие одинаково, а одна – фальшивая, и ее вес отличается от веса настоящей монеты. Известно также, что монеты 1 и 2 не тяжелее настоящей, а монеты 5, 6, 7 – не легче настоящей. Можно ли, используя эту информацию, за два взвешивания на чашечных весах без гирь наверняка определить номер фальшивой монеты и узнать, легче она или тяжелее настоящей, если результаты обоих взвешиваний становится известными только после второго взвешивания?

7. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он придумал такое натуральное число, что для любых натуральных чисел n и k, не больших 1997, это число можно представить в виде произведения n различных натуральных чисел, являющихся точными k-ми степенями. Может ли это утверждение барона быть истинным?

8. Из 35 клетчатых прямоугольников, не являющихся квадратами, составили девять квадратов 10×10. Докажите, что из всех этих прямоугольников можно составить два прямоугольника, площади которых отличаются не более, чем на 80 клеток.

9. Старшина составил расписание дежурств для взвода из 50 курсантов на 30 дней, в котором каждый день заступают на дежурство 4 курсанта, и у каждого курсанта перерыв между дежурствами не менее 5 дней. Докажите, что можно добавить в каждое дежурство по одному курсанту так, чтобы у каждого курсанта перерыв между дежурствами по-прежнему был не менее 5 дней.

10. Докажите, что если четыре биссектрисы внутренних углов выпуклого пятиугольника соответственно перпендикулярны противолежащим сторонам (или их продолжениям), то таким же свойством обладает и пятая биссектриса.

IX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18.02 – 23.02.97

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.97. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. По кругу записаны 1997 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре одно из соседних чисел делится на другое. Докажите, что найдется пара и не соседних чисел с тем же свойством.

2. Можно ли составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными вида $\begin{cases} P(x,y)=0 \\ Q(x,y)=0 \end{cases}$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – многочлены степени не выше второй, чтобы она имела ровно три решения в действительных числах: (2; 3), (0; 2), (9; 7)? Напоминаем, что многочлен xy^2 – третьей степени.

3. На первое занятие танцевального кружка пришли школьники, каждый из которых знает ровно трех других. Руководитель кружка хочет расставить несколько человек в круг так , чтобы каждый знал своих соседей справа и слева. После многочисленных попыток он понял, что ни трех, ни четырех школьников расставить таким образом ему не удастся. Чему равно наименьшее возможное число участников кружка ?

4. Можно ли отметить на плоскости 1001 точку так, чтобы для каждой из них среди расстояний от нее до всех остальных было ровно 999 различных?

5. Верно ли, что если в выпуклом пятиугольнике каждая диагональ делит углы при вершинах, которые она соединяет, в отношении 2:1, то в этом пятиугольнике все углы равны между собой и все стороны равны между собой?

6. На поверхности шарообразной планеты расположено 1996 замков (замки будем считать точками, причем никакие четыре из них не лежат на одной окружности). Два крота по очереди соединяют эти замки прямолинейными туннелями (за один ход прорывается ровно один новый туннель из любого замка, вначале никаких туннелей нет вообще). Проигрывает тот крот, после хода которого можно будет попасть по туннелям из любого замка в любой другой. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий крот или его соперник?

7. Найдите все натуральные n, при которых уравнение $n^x + n^y + n^z + n^t = 2000$ имеет решение в целых числах.

8. Можно ли расставить во всех клетках квадрата 100×100 плюсы и минусы так, чтобы у любого минуса в соседних по сторонам клетках было ровно три плюса, а у любого плюса в соседних по сторонам клетках был ровно один минус?

9. Можно ли в вершинах и серединах сторон 999-угольника расставить натуральные числа от 1 до 1998 так, чтобы сумма чисел на концах каждой стороны равнялась числу в ее середине? Все эти числа нужно использовать ровно по одному разу.

10. Могут ли все прямые, делящие пополам периметр треугольника, пересекаться в одной точке?