

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 19.02.97. ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССОВ

1. Каких чисел среди всех целых чисел от 1 до 1000000 больше и на сколько: делящихся на 5, чья сумма цифр на 5 не делится, или не делящихся на 5, чья сумма цифр на 5 делится?
2. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких, по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый выстрелил в одного из Тонких. Затем каждый уцелевший Тонкий выстрелил в одного из Толстых. Наконец, каждый уцелевший Толстый еще раз выстрелил в одного из Тонких. После этого у армий кончились патроны. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.
3. Два игрока по очереди записывают натуральные числа от 1 до 4 в клетки таблицы 2×2 , причем каждое число может быть записано только один раз. После заполнения всей таблицы отмечается строка, сумма чисел в которой – наибольшая, и столбец, сумма чисел в котором – наибольшая. Выигрышем первого игрока (соответственно, проигрышем второго) назовем разность между суммой чисел в отмеченной строке и суммой чисел в отмеченном столбце. Какой будет выигрыш первого при правильной игре обоих игроков?
4. Для каких n в клетчатом квадрате со стороной n можно расставить $+1$ и -1 так, чтобы все $4n$ сумм и произведений по строкам и по столбцам были одинаковы?
5. Докажите, что уравнение $(x^2+1)(y^2+1) = z^2+1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) на стороне AB взята точка K , а на стороне AC – точка L так, что $AK = CL$. Докажите, что KL не меньше половины BC .

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 19.02.97. ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССОВ

1. Каких чисел среди всех целых чисел от 1 до 1000000 больше и на сколько: делящихся на 5, чья сумма цифр на 5 не делится, или не делящихся на 5, чья сумма цифр на 5 делится?
2. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких, по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый выстрелил в одного из Тонких. Затем каждый уцелевший Тонкий выстрелил в одного из Толстых. Наконец, каждый уцелевший Толстый еще раз выстрелил в одного из Тонких. После этого у армий кончились патроны. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.
3. Два игрока по очереди записывают натуральные числа от 1 до 4 в клетки таблицы 2×2 , причем каждое число может быть записано только один раз. После заполнения всей таблицы отмечается строка, сумма чисел в которой – наибольшая, и столбец, сумма чисел в котором – наибольшая. Выигрышем первого игрока (соответственно, проигрышем второго) назовем разность между суммой чисел в отмеченной строке и суммой чисел в отмеченном столбце. Какой будет выигрыш первого при правильной игре обоих игроков?
4. Для каких n в клетчатом квадрате со стороной n можно расставить $+1$ и -1 так, чтобы все $4n$ сумм и произведений по строкам и по столбцам были одинаковы?
5. Докажите, что уравнение $(x^2+1)(y^2+1) = z^2+1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) на стороне AB взята точка K , а на стороне AC – точка L так, что $AK = CL$. Докажите, что KL не меньше половины BC .