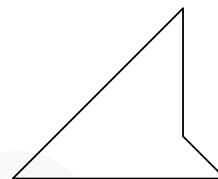


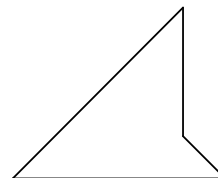
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.11.96. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пусть BC – наибольшая сторона треугольника ABC . На ней взяты точки K и L такие, что $BK = BA$ и $CL = CA$. На стороне AB взята точка M такая, что $BM = BL$, а на стороне AC взята точка N такая, что $CN = CK$. Докажите, что точки A, N, K, L и M лежат на одной окружности.
2. Жюри несло книги на награждение, причем председатель нес 72-ю часть всех книг. Член жюри, который нес больше всех книг, свалился в изнеможении и сошел с дистанции; остальные дошли, а за упавшими книгами сходил председатель. В сумме он принес восьмую часть всех книг. Докажите, что до места награждения добрались не менее 8 рядовых членов жюри.
3. Найдите площадь четырехугольника, три угла которого равны по 45° , а диагональ, выходящая из вершины четвертого угла, равна 2 см (смотри рисунок).
4. У обезьяны было три одинаковых кокосовых ореха, но когда она несла их домой на 19 этаж многоэтажного дерева, один орех упал с 16 этажа и разбился. Обезьяна может кидать оставшиеся орехи с любого этажа. Сможет ли она за пять попыток узнать при падении с каких этажей ее кокосовые орехи разбиваются?
5. Пусть a, b, c и d – натуральные числа. Известно, что abc, abd и acd – точные кубы. Докажите, что bcd – точный куб.
6. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 1000. За один ход разрешается стирать любое число или любые три последовательных натуральных числа. Двое игроков делают ходы по очереди, проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его партнер?
7. В строчку выписаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, причем $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{100}) = 1$. За один ход разрешается выбрать любые два соседних числа и большее (точнее, не меньшее) из них заменить на их разность. Докажите, что за несколько таких операций можно получить набор, состоящий из 99 нулей и одной единицы, стоящей на 13-ом месте.
8. Парно различные числа a, b и c таковы, что $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$. Докажите, что $a + b + c = 1$.
9. Каждой точке координатной плоскости поставим в соответствие произведение ее координат, которое назовем весом точки. Докажите, что для любых двух квадратов с общим центром суммы весов их вершин равны друг другу.
10. Каждый из 24 человек знаком не менее чем с 10 из остальных. Всегда ли можно их поселить в двухместные номера гостиницы так, чтобы каждый был поселен со своим знакомым?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.11.96. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пусть BC – наибольшая сторона треугольника ABC . На ней взяты точки K и L такие, что $BK = BA$ и $CL = CA$. На стороне AB взята точка M такая, что $BM = BL$, а на стороне AC взята точка N такая, что $CN = CK$. Докажите, что точки A, N, K, L и M лежат на одной окружности.
2. Жюри несло книги на награждение, причем председатель нес 72-ю часть всех книг. Член жюри, который нес больше всех книг, свалился в изнеможении и сошел с дистанции; остальные дошли, а за упавшими книгами сходил председатель. В сумме он принес восьмую часть всех книг. Докажите, что до места награждения добрались не менее 8 рядовых членов жюри.
3. Найдите площадь четырехугольника, три угла которого равны по 45° , а диагональ, выходящая из вершины четвертого угла, равна 2 см (смотри рисунок).
4. У обезьяны было три одинаковых кокосовых ореха, но когда она несла их домой на 19 этаж многоэтажного дерева, один орех упал с 16 этажа и разбился. Обезьяна может кидать оставшиеся орехи с любого этажа. Сможет ли она за пять попыток узнать при падении с каких этажей ее кокосовые орехи разбиваются?
5. Пусть a, b, c и d – натуральные числа. Известно, что abc, abd и acd – точные кубы. Докажите, что bcd – точный куб.
6. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 1000. За один ход разрешается стирать любое число или любые три последовательных натуральных числа. Двое игроков делают ходы по очереди, проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его партнер?
7. В строчку выписаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, причем $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{100}) = 1$. За один ход разрешается выбрать любые два соседних числа и большее (точнее, не меньшее) из них заменить на их разность. Докажите, что за несколько таких операций можно получить набор, состоящий из 99 нулей и одной единицы, стоящей на 13-ом месте.
8. Парно различные числа a, b и c таковы, что $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$. Докажите, что $a + b + c = 1$.
9. Каждой точке координатной плоскости поставим в соответствие произведение ее координат, которое назовем весом точки. Докажите, что для любых двух квадратов с общим центром суммы весов их вершин равны друг другу.



10. Каждый из 24 человек знаком не менее чем с 10 из остальных. Всегда ли можно их поселить в двухместные номера гостиницы так, чтобы каждый был поселен со своим знакомым?